

De frie Vandspeilsformer

i

Ledninger med constant Vandføring

af

A. Colding.

Med 3 lithogropherede Tavler.

Undersøgelse

over

de frie Vandspeilsformer, som kunne danne sig i prismatiske eller cylindriske Vandledninger, naar Vandføringen gennem hele Ledningens Længde er constant.

Naar en prismatisk eller cylindrisk Vandledning gennemstrømmes af en constant Vandmængde, der kun deeltvis fylder Ledningens Tversnitsareal, saa viser det sig i Reglen, naar Ledningen har en tilstrækkelig Længde, at Vandspeilet paa en vis Strækning flyder parallelt med Ledningens Bund og at følgelig Vandstrømmens Tversnitsareal saavel som Strømmens Hastighed ere constante paa denne Strækning.

Alle paalidelige Beregninger over Vandføringen ved Hjælp af Ledningens Fald grunde sig paa dette Forhold, og de Forudsætninger, som man sædvanlig gaaer ud fra, naar man vil beregne Vandføringen af en Ledning, hvori Strømmens Vandspeil ikke flyder parallelt med Ledningens Bund, altsaa naar Strømmens Tversnit er ulige stort for de forskjellige Punkter af Ledningen, ere stedse mere eller mindre urigtige, og Resultatet af Beregningen er derfor i samme Grad feilagtigt.

I et tidligere Arbejde over Vandets Bevægelse i lukkede Ledninger, som jeg har meddeelt i Videnskabernes Selskabs Skrifter, 5te Række, 4de Bind, Side 305—348, stillede jeg mig blandt Andet den Opgave, saa vidt muligt at undersøge, om den saakaldte Eytelweinske Formel for Vandets Bevægelse i Ledninger i den Grad kunde ansees for at være paalidelig, at man ved at gaae ud fra denne Formel turde gjøre Regning paa i det Væsentlige at erholde naturtroe Resultater, og jeg kom ved Hjælp af de i den Hensigt udførte Forsøg til den meget tilfredsstillende Overbeviisning, at den Eytelweinske Formel virkelig stemmer saa noie overeens med Forsøg, at man ikke kan nære nogen Tvivl om, at, uagtet den nævnte Formel theoretisk talt ikke kan gjøre Fordring paa at fremstille Lednings-Modstanden imod Vandets Bevægelse exact, saa fremstiller den dog Loven

paa en saadan Maade i dens Hovedtræk, at man kan være forvisset om, at en Undersøgelse, grundet paa denne Formel, i en mærkelig Grad maa nærme sig til den søgte Sandhed.

Det forholder sig nemlig med den Eytelweinske Formel for Vandets Bevægelse i Ledninger omtrent paa samme Maade, som med de Pambourske Formler for Dampens Virkning i Dampmaskinen; thi disse Formler ere alle udsprungne af Betragtningen af en vis Middelvirkning, som, sat istedetfor den forhaandenværende Virkning, vilde frembringe samme Hovedresultat, som denne. Paa Grund heraf ligger det i Sagens Natur paa den ene Side, at ingen af disse Formler kan gjøre Fordring paa at fremstille Phænomenet i dets inderste Grund, men paa den anden Side ogsaa, at alle disse Formler ere saaledes begrundede i Naturens totale Virkning, at deres Resultater stedse, indtil en vis Grad, maae samstemme med Erfaring.

Alle de omhandlede Formler, saavel den Eytelweinske Formel for Vandets Bevægelse, som de Pambourske Formler for Dampens Bevægelse og Virkning i Dampmaskinen, og alle andre Formler, der dannes efter dette Princip, give derfor, som tidligere bemærket, ligesom en Oversigt over det betragtede Phænomen, og for praktiske Tilfælde kan saadant ofte være aldeles tilstrækkeligt, men de give derimod ingen klar Forestilling om og Indsigt i Virkningens indre Natur og Væsen.

I et tidligere Arbeide over Dampmaskinen har jeg viist*) hvorledes Principet for Kræfternes Uforgængelighed aabner os en saadan dybere Indsigt i Dampens Virkningsmaade. Jeg har længe været sysselsat med et Forsøg paa at udføre en tilsvarende Undersøgelse over Lovene for Vandets Bevægelse i det Indre af en Strøm; men hidindtil har det ikke lykkedes mig at bringe denne Undersøgelse tilende, og jeg maa derfor endnu i det nærværende Arbeide indskrænke mig til at betragte Vandstrømmen i Overensstemmelse med den Eytelweinske Anskuelse, som med al sin Ufuldstændighed dog er istand til at udbrede et, som det forekommer mig, interessant Lys over den foreliggende Gjenstand.

Naar en Vandstrøm gjennebløber en cylindrisk eller prismatisk Ledning, saa bevæge de enkelte Elementer, hvoraf hele Strømmen bestaaer, sig som bekjendt med en forskjellig Hastighed. Den Eytelweinske Formel for Ledningsmodstanden eller, om man vil, for Vandets Bevægelse i Ledninger, tager imidlertid ikke videre Hensyn til denne indre Bevægelse og Virksomhed i Strømmen, men grunder sig paa den Betragtning, at Totalstrømmen, der er sammensat af en uendelig Mængde elementaire Strømme, uden Forandring i Vandføringen, kan tænkes som en Strøm, hvis Elementer alle bevæge sig med een

*) Vide Selskabets Skrifter, 5te Række, 3die Bind, Side 1—35.

og samme Hastighed og navnlig med en Hastighed, der i Størrelse er ligestor med Middel-hastigheden af den sande Strøms enkelte Elementer.

Naar denne Middelhastighed betegnes med v , saa kan Modstanden, som Ledningen udøver imod Vandets Bevægelse, ifølge den Eytelweinske Theori fremstilles ved:

$$ghS = g\alpha \cdot C \cdot \lambda \cdot v^2 \dots\dots\dots (1)$$

idet Ledningsmodstanden for en Længde $=\lambda$ af Ledningen, hvis beskyllede Overflade $=C \cdot \lambda$, antages at have foranlediget et Trykhøidetab $=h$ ved Strømmen, altsaa et Tab i bevægende Kraft $=ghS$, hvor g er Tyngdekraften og S er Strømmens Tversnitsareal; C betegner altsaa Længden af Ledningens beskyllede Omtræk, og α fremstiller en Coefficient, som, for at Ligningen (1) skal kunne være homogen, maa være af Graden ($\div 1$), da $g\alpha$ skal være et reent Tal. Med Hensyn til Størrelsen α skal jeg endvidere bemærke, at ifølge mine tidligere Forsøg med glasserede Leerrørs-Ledninger, der findes beskrevne i den foran citerede Afhandling, kan denne Størrelse fremstilles som en Function af Strømhastigheden ved følgende Formel:

$$\alpha = 0,00005428 + \frac{0,00005284}{v} \dots\dots\dots (2)$$

naar Ledningen bestaaer af glasserede Rør, hvorimod man for almindelige Støbejerns-Ledninger saavel som for murede Ledninger maa sætte Modstandscoefficienten $=\frac{4}{3}\alpha$. Er Vandledningen en Flod, en Aa eller lignende, saa vil Modstandscoefficienten være at sætte $=\frac{5}{3}\alpha$ à $\frac{6}{3}\alpha$.

Den Eytelweinske Formel (1) er, som foran bemærket, gjældende, naar Vandstrømmens Tversnitsareal S , og altsaa Strømhastigheden v , er constant for hele Længden λ , men ogsaa kun forsaavidt; thi er Tversnittet af Strømmen variabelt, saa er ogsaa Hastigheden variabel og følgelig Modstanden variabel, og høire Side af (1) bliver da ubestemmelig, saalænge Vandspeilsformen ikke er bestemt. Tænke vi os Ledningen at være lukket, det vil sige dannende et prismatisk eller cylindrisk Rør, da gjælder Formlen (1) i alle Tilfælde, hvor Ledningen er overfyldt, altsaa naar Strømmen udfylder Ledningens hele Tversnitsareal; men er Ledningen derimod ikke aldeles fyldt, saa gjælder Formlen kun for den Deel af Ledningen, gennem hvilken Vandspeilet har samme Fald, som Ledningen.

I det Efterfølgende ville vi kalde en saadan Strøm, hvis Vandspeil er \neq med Ledningens Retning, en Parallelstrøm, og dens Vandspeil ville vi kalde Parallelstrømmens Vandspeil. Min tidligere Afhandling, om Lovene for Vandets Bevægelse i lukkede Ledninger, var foranlediget ved en Række af Undersøgelser, som bleve foretagne for at komme til Klarhed i det. for Praxis vigtige Spørgsmaal om, hvilke Dimensioner og hvilke Fald man bør give saadanne Vandledninger, der skulle tjene til Afledning af Spildevand, altsaa de saakaldte Cloakledninger, og min nærværende Afhandling er ligeledes fremkaldt ved et i sin Tid opstaaet praktisk Spørgsmaal, nemlig Spørgsmaalet om Størrelsen

af den Strømningshastighed, som vil finde Sted i de forskjellige Punkter af en stor cylindrisk Vandledning af henimod $\frac{1}{2}$ Miils Længde, naar denne ligger horizontalt og Vandstanden for begge Ender af samme har ulige Høider over Ledningens Bund.

Behandlingen af denne specielle Opgave førte mig nemlig til forskjellige Resultater af almindelig Interesse, der viste hen paa, at Problemet fortjente en mere omfattende Behandling end den, der fordredes for det specielt foreliggende Tilfælde, og jeg troer, at det saa nogenlunde er lykkedes mig at bringe nyt Lys tilveie i et baade i theoretisk og praktisk Henseende vigtigt Punkt af Hydrauliken, et Punkt, som paa Grund af dets udstrakte Anvendelse ofte er blevet behandlet, men hvis Vanskelighed, saavidt mig bekjendt, hidtil har modstaaet alle Forsøg paa at følge Naturens Traad og afsløre dens Hemmelighed.

I den omtalte Afhandling over Vandets Bevægelse i lukkede Ledninger har jeg paa viist, ved Forsøg med 4^{tom.} og 12^{tom.} Ledninger, hvis Fald varierede mellem 1 : 100 og 1 : 300, at, naar Vandet strømmer igjennem en Ledning fra et Indløbsbassin for Enden af Ledningen, saa sænker Vandspeilet af Strømmen sig, fra Indløbet at regne, mere og mere, skjøndt efterhaanden mindre brat, ned imod Bunden af Ledningen, indtil det tilsidst bliver parallelt med Ledningens Bund, og i bemeldte Afhandling har jeg tillige paa viist ved en Række af Forsøg, som ere angivne under Nr. 40 til 50, hvorledes man indtil en vis Grad kan opstemme Vandet i Afløbsbassinet bag ved Udløbet, uden at Vandføringen forandres. Forsøgene Nr. 59, 74, 77 og 78 sammesteds vise dernæst tydelig nok, at, naar Ledningen har frit Afløb forneden, saa er Strømmens Tversnitsareal paa en Strækning nærmest Udløbet stedse mindre end Ledningens Tversnitsareal, uagtet Ledningen er overfyldt paa den første Deel, og uagtet Strømmen bevæger sig under et Tryk henimod Udløbet; men det er tillige klart af Forsøgene, at Vandspeilet nede ved Udløbet danner en krum Flade, hvis Concavitet vender nedad imod Ledningens Bund, og at Grunden hertil ligger i det frie Fald, hvortil Strømmen nærmede sig ved Udløbet. Disse Vandspeilsformer tilligemed flere andre Former, som viste sig, navnlig naar Ledningen var overfyldt, har jeg fremhævet i den nævnte Afhandling, ligesom jeg ogsaa i almindelige Træk har viist Grunden til deres Forekomst; men det var mig dengang ikke muligt nærmere at bestemme Formen af disse krumme Flader, ei heller at angive, om der ikke foruden disse Vandspeilsformer, som saaledes gave sig tilkjende ved Forsøgene, under andre Omstændigheder endnu vare flere andre Vandspeilsformer mulige, ligesaa lidt som jeg dengang kunde indlade mig paa at undersøge de nævnte Vandspeilsformers Forandringer ved andre Heldninger eller under andre Fyldningsgrader af Ledningen.

En nærmere Bestemmelse af alle de frie Vandspeilsformer, som under forskjellige Beliggenheder af Vandledningen og under forskjellige Fyldningsgrader af samme kunne fremtræde, naar Ledningen igjennem sin hele Længde har samme Vandføring, er det, hvorpaa det nærværende Arbeide væsentligt skal gaae ud.

Betragte vi Formlen (1), da see vi let, at Ledningsmodstanden, svarende til hver Kvadrat-Enhed af Strømmens Tversnitsareal, kan fremstilles ved

$$g\alpha \frac{C}{S} \cdot \lambda \cdot v^2,$$

naar Strømmen paa hele Længden λ har et constant Tversnitsareal $= S$; for en uendelig lille Længde $d\lambda$ af Ledningen er Ledningsmodstanden altsaa fremstillet ved

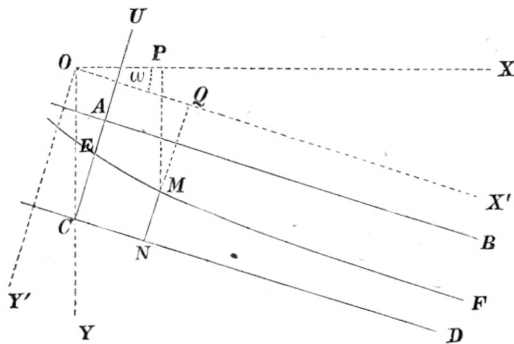
$$g\alpha \frac{C}{S} d\lambda \cdot v^2,$$

hvilket Udtryk for Modstanden er gjældende, hvad enten Vandspeilsformen er plan eller krum; thi for den uendelig lille Længde $d\lambda$ kan man stedse betragte S som constant.

For en Masse-Enhed af Vandstrømmen, hvis Tæthed $= 1$, kan Ledningsmodstanden altsaa stedse fremstilles ved:

$$g\alpha \cdot \frac{C}{S} \cdot v^2 \dots \dots \dots (3)$$

Vi ville nu tænke os en hvilken som helst cylindrisk eller prismatisk Vandledning at være fremstillet ved hosstaaende Figur, hvor Linien CD betegner Ledningens Bund og



Linien AB betegner dens øverste Element, dens Top. Ledningen tænke vi os delviis fyldt med Vand, som continuerligt strømmer ind og bevæger sig langs igjennem Ledningen fra Venstre til Høire indtil det forlader Ledningen ved dens Udmunding; Strømmens frie Vandspeil, hvis Beliggenhed antages at være permanent og hvis Form og Stilling vi søge, ville vi tænke os fremstillet ved den krumme Linie EMF . Det koordinerte Plan XY ville vi tænke os at være

lagt igjennem Ledningens Axe, og, da Ledningen i Reglen er symmetrisk med Hensyn til dette Snit, saa ville vi antage, at XY deler Ledningen i to congruente Halvdele. Tager vi et vilkaarligt Punkt O af Planet XY til Coordinaternes Begyndelsespunkt, saa kunne vi foreløbig vælge den horizontale Linie OX som Abscisse- eller X^{ernes} Axe og den vertikale Linie OY som Ordinat- eller Y^{ernes} Axe, idet begge betragtes som positive; Coordinaterne til et vilkaarligt Punkt M af den søgte Vandspeilslinie ville da kunne fremstilles ved $OP = x$ og $PM = y$; og betegne vi fremdeles den Vinkel XOX' , som Ledningens Retning danner med X^{ernes} Axe, ved ω , saa vil Ledningens Fald i positiv Retning kunne udtrykkes ved $\text{tg } \omega$. Fælde vi nu en Perpendicularær MN ned paa Ledningens Bund

CD fra det betragtede Punkt M af Vandspeilet, saa vil MN fremstille Strømsprofilen svarende til Punktet M af Vandspeilet, og betegne vi endelig den Vinkel, som Vandspeilet i Punktet M danner med Abscisseaxen, ved i , saa seer man let, at den accelererende Kraft, som virker paa de Vanddele, der befinde sig i Strømsprofilen MN , kan fremstilles ved

$$g \sin i = g \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Den almindelige Ligning for Vandets Bevægelse i dette Tverprofil af Strømmen vil altsaa, i Overensstemmelse med hvad jeg i min tidligere Afhandling har udviklet og fremstillet i den derværende Formel (11), for den betragtede cylindriske eller prismatiske Ledning kunne skrives:

$$v dv = g dy - g \alpha \frac{C}{S} v^2 \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots \dots \dots (4)$$

idet vi for Modstanden imod Vandets Bevægelse, svarende til en Masse-Enhed af Strømmen, benytte den Eytelweinske Function (3).

Det vil imidlertid være bekvemt at transformere Coordinaterne til et andet System af retvinklede Coordinater OX' og OY' , nemlig OX' parallel med Ledningens Retning og OY' lodret derpaa, idet vi sætte $OQ = x'$ og $QM = y'$, altsaa

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \omega - y' \sin \omega \\ y &= x' \sin \omega + y' \cos \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Vælg vi dernæst Punktet C til Begyndelsepunkt for et 3die System af retvinklede Coordinater, hvori $CD \neq CX'$ og $CU \neq OY'$, og hvori disse Retninger betragtes som Abscisse- og Ordinat-Axens positive Retning, saa finde vi, idet vi sætte $OC = H$, $CN = \lambda$ og $NM = U$, at

$$x' = H \sin \omega + \lambda, \quad y' = H \cos \omega - U,$$

og naar vi indsætte disse Udtryk i Formlerne (5), erholdes:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda \cos \omega + U \sin \omega \\ y &= H + \lambda \sin \omega - U \cos \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Differentieres disse to Ligninger (6), erholdes

$$\begin{aligned} dx &= d\lambda \cos \omega + dU \cdot \sin \omega \\ dy &= d\lambda \sin \omega - dU \cdot \cos \omega \end{aligned}$$

og naar disse Udtryk for dx og dy indsættes i Formlen (4), erholdes let følgende Ligning for Vandets Bevægelse i Ledningen

$$v dv = g \sin \omega \cdot d\lambda - g \cos \omega \cdot dU - g \alpha \cdot \frac{C}{S} v^2 \cdot \sqrt{d\lambda^2 + dU^2} \dots \dots \dots (7)$$

Før vi gaae videre, ville vi for Simpelteds Skyld i det Følgende gjøre et Par almindelige Bemærkninger og vedtage nogle tilsvarende Betegnelser, som ville lette Oversigten over Forholdene.

Vi ville da først bemærke, at, naar den betragtede Lednings Form er given, saa vil man stedse kunne tænke sig en anden Ledning, hvis Tversnit er ligedannet med den givne cylindriske eller prismatiske Ledning og forøvrigt af en saadan Størrelse, at en vis bestemt Linie i samme (f. Ex. en vis Diagonal, eller Side o. dsl.) er lig Eenheden, imedens den tilsvarende Linie i den givne Lednings Tversnit har en Længde, som vi ville betegne med δ . Denne tænkte Ledning ville vi i det Følgeude kalde den reducerede Ledning til Forskjel fra den givne Ledning, og det er da indlysende, at en hvilkenksomhelst Linie i den givne Lednings Tversnit kan fremstilles som Produktet af δ og den tilsvarende Linie i den reducerede Lednings Tversnit, samt at ethvert Areal i den givne Lednings Tversnit vil kunne udtrykkes som Productet af det tilsvarende Areal i den reducerede Ledning og δ^2 .

Naar vi da i det Følgende, for det betragtede Punkt af den reducerede Ledning, betegner Vandstandshøiden over Bunden ved u
 Tversnitsarealet af Strømmen ved s
 og Længden af Strømmens Tversnits Omtræk, forsaavidt den berører Ledningen, ved . . . c
 saa kunne vi fremstille alle de tilsvarende Stykker af den givne Ledning ved Hjælp af følgende Formler:

$$\left. \begin{aligned} U &= \delta \cdot u \\ S &= \delta^2 \cdot s \\ C &= \delta \cdot c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

hvor u , s og c alle ere rene Tal.

Men dernæst ville vi fremdeles bemærke, at naar en cylindrisk eller prismatisk Vandledning er given, saa vil man stedse kunne betragte Størrelserne s og c , svarende til den reducerede Ledning, som bekendte Functioner af Vandhøiden u , saa at man i Almindelighed vil kunne sætte

$$\left. \begin{aligned} s &= f(u) \\ c &= F(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

hvor baade $f(u)$ og $F(u)$ ere afhængige af Fyldningsgraden i det betragtede Tversnit.

Betegnes nu den givne Lednings Vandføring i Secundet ved q , hvilken Størrelse efter Antagelsen er constant for alle Punkter af Ledningen, saa have vi, i Henhold til hvad her er udviklet,

$$q = v \cdot \delta^2 \cdot s \dots\dots\dots (10)$$

og ifølge Formlerne (9) finde vi altsaa

$$v = \frac{q}{\delta^2} \cdot \frac{1}{f(u)} \dots\dots\dots (11)$$

Ved derpaa først at kvadrere denne Ligning og senere at differentiere det Udkomme, erholdes:

$$v dv = -\frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f'(u)}{f(u)^3} \cdot dU \dots \dots \dots (12)$$

og naar vi derefter indsætte Udtrykkene for v^2 og $v dv$ ifølge Formlerne (11) og (12), i Formlen (7), saa finde vi uden Vanskelighed:

$$\left[g \cos \omega - \frac{q^2 f^1(u)}{\delta^5 f(u)^3} \right] dU = g \sin \omega \cdot d\lambda - g \alpha \frac{q^2 F(u)}{\delta^5 f(u)^3} \cdot \sqrt{d\lambda^2 + dU^2}, \dots \dots \dots (13)$$

hvilken Ligning har Formen

$$A \cdot dU = B \cdot d\lambda - C \cdot \sqrt{d\lambda^2 + dU^2}, \dots \dots \dots (14)$$

idet

$$\left. \begin{aligned} A &= g \cos \omega - \frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3} \\ B &= g \sin \omega \\ C &= g \alpha \frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{F(u)}{f(u)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Af Formlen (14) følger

$$A \left(\frac{dU}{d\lambda} \right) - B = -C \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^2},$$

og ved at kvadrere begge Sider af Ligningen,

$$A^2 \left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^2 - 2AB \left(\frac{dU}{d\lambda} \right) + B^2 = C^2 + C^2 \left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^2,$$

som ordnet efter Potenser af $\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)$ kan skrives

$$\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^2 - 2 \frac{AB}{A^2 - C^2} \cdot \left(\frac{dU}{d\lambda} \right) + \frac{B^2 - C^2}{A^2 - C^2} = 0.$$

Opløses denne Ligning med Hensyn paa $\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)$ saa finde vi

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{AB \pm C\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 - C^2}, \dots \dots \dots (16)$$

hvor det øverste Fortegn, som er fremkommet derved, at vi have kvadreret Formlen (14), maa forkastes.

Men herved maa endvidere bemærkes, at ifølge Formlerne (15) er

$$\left. \begin{aligned} A^2 + B^2 - C^2 &= g^2 - 2g \cos \omega \frac{q^2 f^1(u)}{\delta^5 f(u)^3} + \left(\frac{q^2}{\delta^5 f(u)^3} \right)^2 (f^1(u)^2 - g^2 \alpha^2 F(u)^2) \\ A^2 - C^2 &= g^2 \cos^2 \omega - 2g \cos \omega \frac{q^2 f^1(u)}{\delta^5 f(u)^3} + \left(\frac{q^2}{\delta^5 f(u)^3} \right)^2 (f^1(u)^2 - g^2 \alpha^2 F(u)^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

og idet vi i det Følgende skulle see, at i Reglen er $g^2 \alpha^2 F(u)^2 < 0,0001 \cdot f^1(u)^2$, saa kunne vi med Tilnærmelse sætte:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2 - C^2} &= \sqrt{g^2 - 2g \cos \omega \frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3} + \left(\frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3} \right)^2} \\ \text{og } A^2 - C^2 &= \left(g \cos \omega - \frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18).$$

De her fremstillede Formler gjælde aabenbart for alle Heldningsvinkler ω ; men i de fleste Tilfælde, hvormed vi i Reglen ville have at gjøre, er Ledningens Fald saa lille, at vi tilnærmelsesviis have $\cos \omega = 1$ og uden mærkelig Feil kunne sætte $(g \cos \omega)^2$ istedetfor g^2 i den første Formel (18); foretage vi denne Substitution, saa finde vi

$$\sqrt{A^2 + B^2 - C^2} = g \cos \omega - \frac{q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3} \dots \dots \dots (19).$$

Indsættes dernæst Værdierne for $A, B, C, (A^2 - C^2)$ og $\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}$, ifølge Formlerne (15), (18) samt (19), i Formlen (16), saa finde vi let, at Ligningen for Vandets Bevægelse i cylindriske og prismatiske Ledninger, hvis Fald ikke er større, end at $\cos \omega$ falder meget nær ved 1, kan skrives

$$\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha \cdot \frac{\sin \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{F(u)}{f(u)^3}}{g\alpha \cos \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3}} \dots \dots \dots (20)$$

Denne Formel er, som vi have seet, kun tilnærmelsesviis rigtig; thi den forudsætter, deels at $\cos \omega$ er meget nær lig 1, deels at Forholdet $g\alpha \cdot \frac{F(u)}{f^1(u)}$ er en saa lille Brøk, at den kan udelades i Sammenligning med Eenheden. Med Hensyn til den første Betingelse, skal jeg blot bemærke, at, selv naar Ledningen har et saa stort Fald, at $\text{tg } \omega = \frac{1}{4}$, saa er endnu $\cos \omega$ meget nær ved 1, nemlig = 0,97, og med Hensyn til den sidste Betingelse skal jeg tilføie, at den lille Feil vi begaae ved at betragte Forholdet $g\alpha \cdot \frac{F(u)}{f^1(u)}$, som forsvindende imod 1, yderligere formindskes derved, at vi have sat $g \cos \omega$ istedetfor g i den første Formel (17); men det Væsentlige er, at i alle de Tilfælde, hvor der i Reglen vil blive Tale om at bestemme Vandspeilets Form, kan man uden mærkelig Feil betragte Formlen (20) som fuldkommen correct.

Af Formlen (20) følger, idet vi for U indsætte dens Værdi ifølge (8), at

$$g\alpha \cdot d\lambda = \delta \cdot \frac{g\alpha \cos \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3}}{\sin \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{F(u)}{f(u)^3}} \cdot du \dots \dots \dots (21)$$

hvored det maa erindres, at α i Virkeligheden er en Function af Hastigheden ifølge Formlen (2); men tillige bemærkes, at ved de sædvanlig forekommende Ledninger vil Strømhastigheden sjelden variere saa betydeligt i de forskjellige Punkter af samme Ledning,

at man ikke tilnærmelsesviis og i Reglen uden stor Feil kan integrere Formlen (21) under den Forudsætning, at α er constant for hele Længden; og hvis man i noget Tilfælde skulde nære Tvivl om, at den derved begaaede Feil kan overskride de tilladelige Feils Grændser, saa vil det naturligviis stedse være muligt at integrere imellem saa snævre Grændser, at den begaaede Feil bliver forsvindende.

Til Oversigt over den Maade, hvorpaa Coefficienten α og Produktet $g\alpha$ variere med Strømhastigheden v , tjener efterfølgende Tabel 1, hvori jeg for en Række Værdier af v har angivet de tilsvarende Værdier af α og $g\alpha$ for glasserede Rør, for Støbejerns og Muurværks Ledninger, og for naturlige Kanaler, Aaer, Floder o. desl.

Tabel 1.

| v i Fod pr. Sec. | Glasserede Rør. | | Støbejerns- og Muurværks- Ledninger. | | Naturlige Vandløb. | |
|--------------------------|-----------------|-----------|---|-----------|----------------------------|--------------------|
| | α | $g\alpha$ | α | $g\alpha$ | α | $g\alpha$ |
| 0,25 | 0,000266 | 0,0085 | 0,000355 | 0,0111 | { 0,000445 à { 0,000532 | 0,0137 à 0,0166 |
| 0,53 | 0,000215 | 0,0066 | 0,000284 | 0,0088 | { 0,000555 à { 0,000426 | 0,0110 à 0,0132 |
| 0,50 | 0,000160 | 0,0050 | 0,000215 | 0,0067 | { 0,000266 à { 0,000320 | 0,0083 à 0,0100 |
| 0,75 | 0,000126 | 0,0039 | 0,000168 | 0,0052 | { 0,000210 à { 0,000252 | 0,0065 à 0,0078 |
| 1,00 | 0,000107 | 0,0033 | 0,000145 | 0,0044 | { 0,000178 à { 0,000214 | 0,0055 à 0,0066 |
| 1,25 | 0,000097 | 0,0030 | 0,000129 | 0,0040 | { 0,000161 à { 0,000194 | 0,0050 à 0,0060 |
| 1,50 | 0,000090 | 0,0028 | 0,000120 | 0,0037 | { 0,000150 à { 0,000180 | 0,0046 à 0,0056 |
| 1,75 | 0,000085 | 0,0026 | 0,000113 | 0,0035 | { 0,000141 à { 0,000170 | 0,0043 à 0,0052 |
| 2,00 | 0,000081 | 0,0025 | 0,000108 | 0,0033 | { 0,000135 à { 0,000162 | 0,0041 à 0,0050 |
| 2,5 | 0,000075 | 0,0024 | 0,000100 | 0,0032 | { 0,000125 à { 0,000150 | 0,0039 à 0,0048 |
| 3,0 | 0,000072 | 0,0022 | 0,000096 | 0,0029 | { 0,000120 à { 0,000144 | 0,0037 à 0,0046 |
| 4,0 | 0,000068 | 0,0021 | 0,000091 | 0,0028 | { 0,000110 à { 0,000136 | 0,0035 à 0,0042 |
| 10,0 | 0,000060 | 0,0019 | 0,000080 | 0,0025 | { 0,000100 à { 0,000120 | 0,0031 à 0,0038 |
| ∞ | 0,000054 | 0,0017 | 0,000072 | 0,0023 | { 0,000090 à { 0,000108 | 0,0028 à 0,0034 |

Af denne Tabel vil det være indlysende, at det egentlig kun er for Vandledninger med en meget lille Strømhastighed, hvor der kan være Tale om at begaae nogen mærkelig Feil ved under Integrationen af Formlen (21) at betragte α og $g\alpha$ som constante, og da der kun meget sjelden vil blive Spørgsmaal om at bestemme Vandspeilsformen i Ledninger, hvori Strømmen har en meget ringe Hastighed, saa er det indlysende, at vi i Reglen kun begaae en ringe Feil, naar vi for α og $g\alpha$ tage de constante Værdier, som svare til Strømmens Middelastighed.

Integreres Formlen (21) imellem Grændser $u = u_0$ og $u = u$, idet α betragtes som constant, saa erhoides

$$g\alpha \cdot \lambda = \delta \cdot \int_{u_0}^u \frac{g\alpha \cos \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{f^1(u)}{f(u)^3}}{\sin \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \frac{F(u)}{f(u)^3}} \cdot du \dots \dots \dots (22)$$

Heraf lære vi, at, naar Integrationen tænkes udført, og Vandhøiderne over Ledningens Bund, u og u_0 , ere givne, samt naar vi tilmed kjende den imellem disse to Punkter liggende Længde af Ledningen, λ , saa kunne vi af disse bekjendte Størrelser beregne Vandføringen q , og efter at denne er funden, vil (22), som en Ligning imellem λ og u , fremstille Ligningen for det søgte Vandspeil.

Med Hensyn paa de to Functioner af Ledningens Fyldningsgrad, som indgaae i de tre sidste Formler, og som ere betegnede ved $\frac{f^1(u)}{f(u)^3}$ og $\frac{F(u)}{f(u)^3}$ ville vi bemærke, at, naar vi for Kortheds Skyld sætte

$$\frac{f^1(u)}{f(u)^3} = \psi \text{ og } \frac{F(u)}{f(u)^3} = \varphi \dots \dots \dots (23)$$

saa have vi stedse $\psi \leq \varphi$ for alle mulige Fyldningsgrader af Ledningen, hvilket ganske simpelt godtgjøres derved, at vi kunne bevise, at for den reducerede Ledning er $f^1(u)$ enten ligestor eller mindre end $F(u)$. For at bevise dette, bemærkes, at for en hvilken som helst Tversnitsform af den reducerede Ledning betegner $f^1(u) du$ den Tilvæxt, som Strømmens Tversnitsareal erhoider derved, at λ faaer Tilvæksten $d\lambda$, og $f^1(u)$ fremstiller altsaa Vandspeilets Brede i den reducerede Ledning svarende til Vandhøiden u ; men da Bredden $f^1(u)$ stedse er ligestor eller mindre end den beskyllde Contour af Ledningens Tversnitsareal, som er fremstillet ved $F(u)$, saa er dermed beviist, at $\psi \leq \varphi$.

Naar vi nu indføre Størrelserne φ og ψ , der altsaa alene ere Functioner af Ledningens Fyldningsgrad, saa kan Formlen (21) skrives simplere saaledes:

$$g \alpha \cdot d\lambda = \delta \cdot \frac{g \alpha \cos \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \psi}{\sin \omega - \frac{\alpha q^2}{\delta^5} \cdot \varphi} \cdot du \dots \dots \dots (24)$$

og Problemet om de frie Vandspeilsformer kan altsaa i det Væsentlige betragtes som reduceret til det, at integrere Ligningen (24) for de forskjellige Classer af Tilfælde, som man vil undersøge.

Hermed ville vi nu strax i Almindelighed bemærke, at Formlen (24) kan skrives under følgende Form:

$$\frac{dU}{d\lambda} = g \alpha \cdot \frac{\frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot \frac{\delta^5}{q^2} - \varphi}{g \cos \omega \cdot \frac{\delta^5}{q^2} - \psi} \dots \dots \dots (25)$$

hvoraf sees, at, hvorledes Vandledningens Tversningsform end maatte være, saa er Vandspeilet parallelt med Ledningens Bund, naar $\varphi = \varphi_p$, idet

$$\varphi_p = \frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot \frac{\delta^5}{q^2} \dots \dots \dots (26)$$

samt at λ er et Maximum eller et Minimum, naar $\psi = \psi_m$, idet

$$\psi_m = g \cos \omega \cdot \frac{\delta^5}{q^2} \dots \dots \dots (27)$$

Naar vi for Størrelsen φ indsætte dens Værdi, ifølge Formlen (23), saa kan Ligningen $\varphi = \varphi_p$ skrives:

$$\frac{F(u)}{f(u)^3} = \frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot \frac{\delta^5}{q^2}, \dots \dots \dots (28)$$

som, idet vi indsætte Værdierne for $F(u)$ og $f(u)$ ifølge (8) og (9), kan fremstilles

$$\sin \omega = \alpha \cdot q^2 \cdot \frac{C}{S^3} \dots \dots \dots (29)$$

og heri gjenkjende vi let den almindelige Ligning for Vandets Bevægelse i en hvilken-somhelst prismatisk eller cylindrisk Ledning, hvori Vandspeilet flyder parallelt med Ledningens Bund.

Indsætte vi dernæst Værdien for ψ ifølge (23), saa kan Ligningen $\psi = \psi_m$ fremstilles under følgende Form:

$$\frac{f^1(u)}{f(u)^3} = g \cos \omega \cdot \frac{\delta^5}{q^2} \dots \dots \dots (30)$$

hvoraf sees, at, naar Ledningen har saa lille et Fald, at vi uden mærkelig Feil kunne sætte $\cos \omega = 1$, saa vil Vandføringen q kun afhænge af Ledningens Tversnitsform samt af Vandhøiden i det Punkt af Ledningen, hvor λ er et Maximum eller et Minimum, d. v. s., af Vandhøiden i en af Ledningens Mundinger, og navnlig saaledes, at Indløbsaabningen svarer til Minimum og Udløbsaabningen til Maximum af λ , naar λ er positiv, medens Indløbsaabningen svarer til Maximum af λ og Udløbsaabningen til Minimum af λ , naar denne er negativ.

Indføre vi Størrelserne φ_p og ψ_m i Formlen (25), saa kan denne Formel skrives

$$\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - \varphi}{\psi_m - \psi} \dots \dots \dots (31)$$

og naar vi da fremdeles sætte

$$(\varphi_p - \varphi) \frac{d\psi}{du} - (\psi_m - \psi) \frac{d\varphi}{du} = T \dots \dots \dots (32)$$

saa finde vi let

$$\frac{d^2 \lambda}{du^2} = - \frac{\delta}{g\alpha} \frac{T}{(\varphi_p - \varphi)^2} \dots \dots \dots (33)$$

hvoraf følger, at λ er et Maximum for $\psi = \psi_m$, dersom λ og $T = (\varphi_p - \varphi) \frac{d\psi}{du}$ have samme Fortegn, og et Minimum, dersom de have modsatte Fortegn. Men deraf følger atter, at naar $T = (\varphi_p - \varphi) \frac{d\psi}{du}$ er positiv for $\psi = \psi_m$, saa maales Vandhøiden U_m , svarende til $\psi = \psi_m$, i Udmundingen af Ledningen, hvorimod denne Vandhøide maales i Indmundingen af Ledningen, naar $T = (\varphi_p - \varphi) \frac{d\psi}{du}$ er negativ. Ved at differentiere Ligningen (31) finde vi fremdeles

$$\frac{d^2 U}{d\lambda^2} = g\alpha \cdot \frac{T \cdot \frac{dU}{d\lambda}}{(\psi_m - \psi)^2} \dots \dots \dots (34)$$

og det vil da være let tillige at bestemme Vandspeilets Krumningsradius r for et hvilket-somhelst Punkt, hvis Coordinater ere λ og U ; thi indsætte vi Værdierne for $\frac{dU}{d\lambda}$ og $\frac{d^2 U}{d\lambda^2}$ i den velbekjendte Formel

$$r = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dU}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 U}{d\lambda^2}}$$

saa finde vi Krümmingsradius fremstillet ved

$$r = \pm \frac{\delta}{(g\alpha)^2} \cdot \frac{[(\psi_m - \psi)^2 + (g\alpha)^2 (\varphi_p - \varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}{T(\varphi_p - \varphi)}, \dots \dots \dots (35)$$

hvor Fortegnet vælges saaledes, at r bliver negativ eller positiv, eftersom Vandspeilet er convext eller concavt imod Ledningens Bund.

Da dernæst Vanddybden U bestandig er positiv, saa er det indlysende, at Vandspeilet er concavt imod Bunden af Ledningen, naar T og $\frac{dU}{d\lambda}$ have samme Fortegn, convext, naar T og $\frac{dU}{d\lambda}$ have modsatte Fortegn, og det er fremdeles indlysende, at Vandspeilet har et Inflexionspunkt, naar $T=0$, eller, hvad der ifølge Formlerne (31) og (32) er det samme,

naar

$$\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha \cdot \frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)} \dots \dots \dots (36)$$

Prismatiske Vandledninger.

Rectangulære Ledninger.

Iblandt de prismatiske Vandledninger, hvis Tversnit selvfølgelig er en Polygon, ville vi nærmere betragte den særegne Klasse, der har et rectangulært Tversnit, og vi ville da navnlig tænke os Ledningen saaledes stillet, at det 4-sidede Prismes ene Sideflade danner Ledningens Bund og at de to hosliggende Sideflader ere lodrette Planer af ubegrændset Høide.

For den reducerede Ledning, svarende til den saaledes givne rectangulære Ledning, ville vi tænke os Bredden = 1, samt at Vandhøiden over Ledningens Bund i et vilkaarligt Punkt er = u , idet vi antage, at Bredden af den givne Ledning er = δ . Vi finde da Strømmens Tversnitsareal s for den reducerede Ledning fremstillet ved:

$$s = f(u) = u, \text{ altsaa } f'(u) = 1,$$

samt c eller den beskyllede Contour for samme Tversnitsareal udtrykt ved

$$c = F(u) = 1 + 2u,$$

og dersom vi antage, at Vandstrømmens Brede er meget stor i Sammenligning med Vandhøiden over Ledningens Bundplan, saa kunne vi uden mærkelig Feil sætte

$F(u) = 1$. Som en Følge heraf finde vi

$$\varphi = \psi = \frac{1}{u^3} \dots \dots \dots (37)$$

Indsættes denne Værdi for φ og ψ i Formlen (24) erhoides

$$g \alpha d \lambda = \delta \cdot \frac{g \alpha \cos \omega \cdot u^3 - \frac{\alpha q^2}{\delta^5}}{\sin \omega \cdot u^3 - \frac{\alpha q^2}{\delta^5}} \cdot du \dots \dots \dots (38).$$

Naar vi nu, idet vi gaae over til at integrere denne Ligning, vedtage at betegne Parallelstrømmens Vanddybde i den givne Ledning ved U_p og Parallelstrømmens Vanddybde i den reducerede Ledning ved u_p , saa haves ifølge Formlerne (8), (23), (28) og (37)

$$U_p = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\sin \omega} \cdot \left(\frac{q}{\delta}\right)^2}, \quad u_p = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot q^2}{\sin \omega \cdot \delta^5}} \dots \dots \dots (39)$$

og naar Integrationen af Ligningen (38) derefter udføres, saa finde vi Ligningen for det søgte Vandspeil fremstillet ved følgende Formel:

$$g \alpha \cdot \lambda = \text{Const.} + \frac{g \alpha}{\text{tg } \omega} \cdot U + \left(\frac{g \alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \frac{U_p}{3} \left[\text{Log} \frac{u - u_p}{\sqrt{u^2 + u u_p + u_p^2}} \div \sqrt{3} \cdot \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{u + \frac{u_p}{2}}{\sqrt{3} \cdot \frac{u_p}{2}} \right) \right] \quad (40)$$

hvor Log betegner den naturlige Logarithme.

Af denne Formel see vi først, at, hvis den betragtede Vandstrøm i noget Punkt har en Dybde $U > U_p$, saa maa Vandspeilet heelt og holdent ligge saaledes, at man for et hvilket som helst Punkt af samme har $U \geq U_p$; thi enhver Værdi af $U < U_p$ vilde da gjøre λ imaginær; og paa samme Maade sees det fremdeles, at, hvis Strømmens Vanddybde i noget Punkt er mindre end Parallelstrømmens Vanddybde U_p , saa maa ogsaa Vanddybden for alle andre Punkter af Strømmen være ligestor eller mindre end U_p . Formlen (40) omfatter saaledes to særskilte Classer af Tilfælde, der begge ere mulige hver for sig, men samtidigt ere umulige for een og samme Strøm. Den ene af disse Classer omfatter altsaa de Tilfælde, hvor $U \geq U_p$, og den anden de Tilfælde, hvor $U < U_p$.

Sætte vi nu for Simpelheds Skyld

$$U = n \cdot U_p \quad \text{og} \quad u = n \cdot u_p \dots \dots \dots (41)$$

samt

$$\frac{1}{3} \left[\text{Log} \frac{\pm(n-1)}{\sqrt{n^2 + n + 1}} - \sqrt{3} \cdot \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2n+1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \Delta n, \dots \dots \dots (42)$$

hvor Tegnet under Logarithmen vælges saaledes, at Δn stedse bliver reel, altsaa $+$, naar $n > 1$, og $-$, naar $n < 1$, saa finde vi let, at Formlen (40) kan skrives

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\operatorname{tg} \omega} (n - n_0) + \left(\frac{g\alpha}{\operatorname{tg} \omega} - 1 \right) (\Delta n - \Delta n_0) \right] \dots \dots \dots (43)$$

idet vi antage Vanddybden i den reducerede Ledning lig u_0 for en Afstand $\lambda = \lambda_0$.

Antage vi fremdeles, at den vertikale Afstand fra Horizontalplanet xz til det Punkt af Vandspeilet, hvis Coordinater ere λ_0 og U_0 ; er fremstillet ved y_0 , saa finde vi, ifølge den sidste af Formlerne (6), ved at borteliminere Constanten H , at Vandspeilets Sænkning paa Længden ($\lambda - \lambda_0$) kan fremstilles ved:

$$y - y_0 = \sin \omega \cdot (\lambda - \lambda_0) - \cos \omega \cdot (U - U_0)$$

og naar vi heri indsætte Udtrykket for $(\lambda - \lambda_0)$ ifølge (43), erholdes følgende simple Ligning til Bestemmelse af denne Sænkning, nemlig

$$(y - y_0) = U_p \cdot \frac{g\alpha \cos \omega - \sin \omega}{g\alpha} \cdot (\Delta n - \Delta n_0) \dots \dots \dots (44)$$

Af denne Ligning see vi først, at Sænkningen er lig Nul, det vil sige, at Vandspeilet af den betragtede Strøm er horizontalt og Vandføringen $q = 0$, naar $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$, hvis vi ikke samtidigt have $\Delta n = \infty$, altsaa $n = 1$, og følgelig $u = u_p$. Finder der altsaa Strømning Sted igjennem en Ledning, som har et saadant Fald, at $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$, saa vil Strømmens Vandspeil stedse være parallelt med Ledningens Bund lige fra Begyndelsen til Enden af Ledningen. Af Formlerne (43) og (44) fremgaaer, hvad der ogsaa følger ligefrem af Sagens Natur, at, naar $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$ og $u = u_p$, altsaa $\Delta n = \infty$, saa ere baade $(\lambda - \lambda_0)$ og $(y - y_0)$ ubestemte, naar de betragtes som Functioner af u .

Ved Hjælp af Formlerne (43) og (44) vil det, som vi i det Følgende skulle see, være muligt at løse de forskjellige Opgaver, som kunne forekomme ved rectangulære Ledninger, hvis Brede er saa stor imod Vandstrømmens Dybde, at vi kunne see bort fra Sidevæggenes Indflydelse paa samme. Men selv i saadanne Tilfælde, hvor Sidevæggene udøve en kjendelig Modstand, vil det ikke være vanskeligt at corrigere Resultatet med Hensyn derpaa.

Til Lettelse ved forekommende Beregninger har jeg ifølge Formlen (42) bestemt Værdierne af Δn for en Række af Værdier af n og derved erholdt de sammensvarende Værdier af n og Δn , som findes angivne i den efterfølgende Tabel 2.

Tabel 2,

beregnet for rektangulære Vandledninger, der have Fald i Strømmens Retning.

| n | $\div \Delta n$ | n | $\div \Delta n$ | n | $\div \Delta n$ | n | $\div \Delta n$ | n | $\div \Delta n$ |
|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|----------|-----------------|
| 0,00 | 0,50 | 0,72 | 1,10 | 1,40 | 1,21 | 2,10 | 1,027 | 2,80 | 0,970 |
| 0,02 | 0,52 | 0,74 | 1,13 | 1,42 | 1,20 | 2,12 | 1,025 | 2,82 | 0,969 |
| 0,04 | 0,54 | 0,76 | 1,16 | 1,44 | 1,19 | 2,14 | 1,022 | 2,84 | 0,968 |
| 0,06 | 0,56 | 0,78 | 1,20 | 1,46 | 1,18 | 2,16 | 1,020 | 2,86 | 0,967 |
| 0,08 | 0,58 | 0,80 | 1,24 | 1,48 | 1,17 | 2,18 | 1,018 | 2,88 | 0,966 |
| 0,10 | 0,40 | 0,82 | 1,28 | 1,50 | 1,16 | 2,20 | 1,016 | 2,90 | 0,965 |
| 0,12 | 0,42 | 0,84 | 1,33 | 1,52 | 1,15 | 2,22 | 1,014 | 2,92 | 0,964 |
| 0,14 | 0,44 | 0,86 | 1,38 | 1,54 | 1,14 | 2,24 | 1,012 | 2,94 | 0,963 |
| 0,16 | 0,46 | 0,88 | 1,44 | 1,56 | 1,13 | 2,26 | 1,010 | 2,96 | 0,962 |
| 0,18 | 0,48 | 0,90 | 1,50 | 1,58 | 1,125 | 2,28 | 1,008 | 2,98 | 0,961 |
| 0,20 | 0,50 | 0,92 | 1,60 | 1,60 | 1,120 | 2,30 | 1,006 | 3,00 | 0,960 |
| 0,22 | 0,52 | 0,94 | 1,70 | 1,62 | 1,115 | 2,32 | 1,004 | 3,02 | 0,959 |
| 0,24 | 0,54 | 0,96 | 1,85 | 1,64 | 1,110 | 2,34 | 1,002 | 3,04 | 0,959 |
| 0,26 | 0,56 | 0,98 | 2,10 | 1,66 | 1,105 | 2,36 | 1,000 | 3,06 | 0,958 |
| 0,28 | 0,58 | 0,99 | 2,35 | 1,68 | 1,100 | 2,38 | 0,999 | 3,08 | 0,957 |
| 0,30 | 0,60 | 1,00 | ∞ | 1,70 | 1,095 | 2,40 | 0,997 | 3,10 | 0,956 |
| 0,32 | 0,62 | 1,01 | 2,36 | 1,72 | 1,090 | 2,42 | 0,996 | 3,12 | 0,955 |
| 0,34 | 0,64 | 1,02 | 1,96 | 1,74 | 1,085 | 2,44 | 0,994 | 3,14 | 0,955 |
| 0,36 | 0,67 | 1,04 | 1,80 | 1,76 | 1,080 | 2,46 | 0,993 | 3,16 | 0,954 |
| 0,38 | 0,69 | 1,06 | 1,70 | 1,78 | 1,075 | 2,48 | 0,991 | 3,18 | 0,953 |
| 0,40 | 0,71 | 1,08 | 1,65 | 1,80 | 1,070 | 2,50 | 0,990 | 3,20 | 0,952 |
| 0,42 | 0,73 | 1,10 | 1,59 | 1,82 | 1,067 | 2,52 | 0,989 | 3,22 | 0,952 |
| 0,44 | 0,75 | 1,12 | 1,53 | 1,84 | 1,063 | 2,54 | 0,987 | 3,24 | 0,951 |
| 0,46 | 0,78 | 1,14 | 1,49 | 1,86 | 1,060 | 2,56 | 0,986 | 3,26 | 0,950 |
| 0,48 | 0,80 | 1,16 | 1,45 | 1,88 | 1,057 | 2,58 | 0,984 | 3,43 | 0,945 |
| 0,50 | 0,82 | 1,18 | 1,42 | 1,90 | 1,053 | 2,60 | 0,983 | 3,60 | 0,940 |
| 0,52 | 0,84 | 1,20 | 1,40 | 1,92 | 1,050 | 2,62 | 0,981 | 3,90 | 0,935 |
| 0,54 | 0,87 | 1,22 | 1,37 | 1,94 | 1,047 | 2,64 | 0,980 | 4,20 | 0,930 |
| 0,56 | 0,89 | 1,24 | 1,35 | 1,96 | 1,045 | 2,66 | 0,979 | 4,60 | 0,925 |
| 0,58 | 0,91 | 1,26 | 1,33 | 1,98 | 1,042 | 2,68 | 0,978 | 5,00 | 0,920 |
| 0,60 | 0,94 | 1,28 | 1,30 | 2,00 | 1,040 | 2,70 | 0,976 | 6,00 | 0,918 |
| 0,62 | 0,96 | 1,30 | 1,28 | 2,02 | 1,037 | 2,72 | 0,975 | 7,00 | 0,916 |
| 0,64 | 0,99 | 1,32 | 1,27 | 2,04 | 1,035 | 2,74 | 0,974 | 8,00 | 0,914 |
| 0,66 | 1,02 | 1,34 | 1,25 | 2,06 | 1,032 | 2,76 | 0,972 | 9,00 | 0,912 |
| 0,68 | 1,04 | 1,36 | 1,24 | 2,08 | 1,030 | 2,78 | 0,971 | 10,00 | 0,910 |
| 0,70 | 1,07 | 1,38 | 1,22 | 2,10 | 1,027 | 2,80 | 0,970 | ∞ | 0,905 |
| 0,72 | 1,10 | 1,40 | 1,21 | | | | | | |

Jeg vil nu forsøge at classificere de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne fremtræde ved de omhandlede rectangulære Ledninger, samt at belyse Anvendelsen af de fundne Formler ved specielle Exempler.

Af det tidligere Anførte vil det være klart, at de forskjellige Vandspeilsformer dele sig i to Hovedclasser, nemlig i de Former, for hvilke Vanddybden $u < u_p$ og de for hvilke Vanddybden $u > u_p$. Men da det fremdeles er let at see, at man for ethvert af disse Tilfælde kan have enten $g\alpha < \text{tg } \omega$ eller $g\alpha > \text{tg } \omega$, saa deler Undersøgelsen sig naturligt i en Undersøgelse af følgende fire forskjellige Tilfælde, som vi nu efterhaanden ville nærmere betragte hver for sig.

- | | | | | | |
|------|-----------|------|---------|----|-------------------------------|
| I. | Tilfælde, | hvor | $n < 1$ | og | $\text{tg } \omega > g\alpha$ |
| II. | — | — | $n < 1$ | og | $\text{tg } \omega < g\alpha$ |
| III. | — | — | $n > 1$ | og | $\text{tg } \omega > g\alpha$ |
| IV. | — | — | $n > 1$ | og | $\text{tg } \omega < g\alpha$ |

Betragte vi det første af disse fire Tilfælde, da see vi strax, ifølge Tabel 2, at Δn er negativt aftagende fra $-\infty$ til $-0,3$, naar n aftager fra 1 til Nul, og fremdeles at, da baade $\left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right)$ og Δn ere bestandig negative, saa er Størrelsen

$$\frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1 \right) \Delta n \right]$$

bestandig positiv og aftagende fra ∞ til $0,3 \cdot \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \frac{U_p}{g\alpha}$, naar n aftager fra 1 til Nul.

Tage vi altsaa det Punkt af Ledningen, hvortil der svarer $n_0 = 0$ og $\Delta n_0 = -0,3$, til Coordinaternes Begyndelsespunkt, det vil sige, sætte vi $\lambda_0 = 0$, saa vil Formlen (43) kunne skrives

$$\lambda = \frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1 \right) (\Delta n + 0,3) \right] \dots \dots \dots (45)$$

hvoraf fremgaaer, at λ voxer fra Nul i det Uendelige, naar n voxer fra Nul til 1.

Da vi nu have seet i det Foregaaende, at $u = u_p$ fremstiller Ligningen for Parallelstrømmens Vandspeil, og da u først bliver lig u_p for $n = 1$, saa vil det være klart, ifølge Formlen (45), at Vandspeilet først fuldstændigt bliver parallelt med Ledningens Bund for $\lambda = \infty$, altsaa i en uendelig stor Afstand fra Coordinaternes Begyndelsespunkt; men ved at betragte Tabel 2 noget nærmere, vil man tillige let overbevise sig om, at Afvigelsen fra det virkelige parallelle Vandspeil allerede kun beløber sig til 0,01 af Parallelstrømmens Vanddybde u_p for et Punkt af Ledningen, hvori $n = 0,99$ og $\Delta n = -2,35$, og hvis Afstand fra Begyndelsespunktet er let at beregne ved Hjælp af Formlen (45).

Antage vi som Exempel, at Ledningen har et Fald, bestemt ved $\text{tg } \omega = 0,008$, at

Ledningen er udført af Muurværk og at Strømmens Middelhastighed er saadan, at vi kunne sætte $g\alpha = 0,003$, saa finde vi ifølge Formlen (39)

$$\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} = 0,375 \text{ og } U_p = 0,23 \cdot \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}};$$

indsætte vi disse Værdier i Formlen (45) tilligemed $n = 0,99$ og $\Delta n = -2,35$, saa finde vi Afstanden til det Punkt af Vandspeilet, hvis Høide over Bunden af Ledningen ikke afviger mere fra Parallelstrømmens Vandspeil end $0,0023 \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, at være

$$\lambda = 119,5 \cdot \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}},$$

som altsaa er 520 Gange større end Parallelstrømmens Vanddybde.

Den heromhandlede Vandspeilsform svarer aabenbart til en Strøm, der træder ind i Ledningen med en stor Begyndelseshastighed, som paa Grund af Ledningsmodstanden efterhaanden taber sig, indtil Strømmens Hastighed tilsidst er reduceret til den, som svarer til Ledningens Fald, og Betingelsen for denne Vandspeilsforms Fremkomst vil derfor være tilstede, naar Ledningens Fald eller $\text{tg } \omega > g\alpha$, og Vandet strømmer ind i Ledningen fra et Indløbsbassin, hvori det staaer opstemmet til en given Høide over Vandledningens Bund, samt naar Indløbet til Ledningen lukkes delviis ved et Stigbord, hvis nederste Kant er horizontal, og navnlig til en saadan Grad, i Forhold til Trykhøiden i Indløbsbassinet, at den indstrømmende Vandmængde bliver ligestor med Ledningens Vandføring under Parallelstrømmen, med Dybden U_p . Kommer Vandet ind i Ledningen med en uendelig stor Hastighed, f. Ex. fra Bunden af et Indløbsbassin, hvori Vandet tænkes opstemmet til en uendelig stor Høide, saa kan Tversnitsarealet af Stigbordsaabningen naturligviis kun være uendelig lille, saafremt Ledningen ikke skal overfyldes, og i et saadant Tilfælde vilde man altsaa erholde den fuldstændige Vandspeilsform, som er angivet paa Plan I. ved Fig. 1, hvor CD og CU betegne de coordinerte Axer og $CEMF$ betegner Vandspeilet. Er baade Trykhøiden og Indstrømningshastigheden endelige Størrelser, saa bliver Strømmens Form endnu den samme, kun med den Forskjel, at en vis Længde $CG = \lambda_0$, hvis Størrelse kan beregnes ifølge Formlen (45), bortfalder.

Havde man t. Ex. ved det nys betragtede specielle Tilfælde havt opgivet, at i Stigbordsaabningen var $EG = 0,5 \cdot U_p$, saa vilde man have havt $n_0 = 0,5$, og ifølge Tab. 2 $\Delta n_0 = \div 0,82$, hvorefter vi, afseet fra Contractionen i Stigbordsaabningen, vilde have fundet Længden $CG = \lambda_0 = 39,5 \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$. Under disse Forhold vilde altsaa allerede Vandspeilet meget nær have været parallelt med Ledningens Bund i en Afstand fra Stigbordsaabningen, lig $(\lambda - \lambda_0) = 80 \cdot \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, hvilken Længde naturligviis ogsaa ligefrem kunde

beregnes ved Hjælp af Formlen (43), ved deri at sætte $n = 0,99$ og $n_0 = 0,5$ o. s. v. Antage vi fremdeles t. Ex., at Vandføringen af Ledningen for hver Fods Brede er $\left(\frac{q}{\delta}\right) = 5$ Cbfod pr. Secund, saa er $\left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} = 2,924$ og Vanddybden af Parallelstrømmen findes da lig $U_p = 0,23 \cdot 2,924 = 0,67$ Fod. Afstanden fra Stigbordsaabningen til et Punkt af Ledningen, hvor Vanddybden ikke afviger mere fra Parallelstrømmens Vanddybde end $\frac{2}{3}$ Decimal-Linie, vil følgelig under disse Forhold være $(\lambda - \lambda_0) = 234$ Fod.

Jeg skal herved endnu blot bemærke, at da Parallelstrømmens Vanddybde er $\frac{2}{3}$ Fod, og da Stigbordsaabningen kun er 0,5 af denne Høide, saa bliver Strømmens Middelhastighed henimod 10 Fod pr. Sec., hvoraf efter Tabel 1 følger, at de foreløbig valgte Værdier for α og $g\alpha$ ere lidt for store; men da intet kan være lettere, end at corrigere den her begaaede Feil, skal jeg ikke opholde mig derved.

Efter saaledes at have bestemt den Vandspeilsform, som svarer til den første af de angivne fire Classer af Tilfælde, vil jeg gaae over til at bestemme Vandspeilsformen svarende til den følgende Classe af Tilfælde, nemlig:

Tilfældet II., hvori $u < u_p$ og $g\alpha > \text{tg } \omega$.

Det vil da strax være klart, at $\left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right) \cdot \Delta n$ er bestandig negativ, aftagende fra $-\infty$ til $\div 0,3 \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right)$, naar n aftager fra 1 til Nul, hvoraf følger, at $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \Delta n\right]$ er negativ for alle endelige Værdier af $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega}$, naar n har en af de to Grændseværdier, $n = 0$ eller $n = 1$; men det er dernæst meget let at see, at naar $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega}$ kun er lidt større end 1, saa vil $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right) \Delta n\right]$ være positiv for visse Værdier af n , beliggende mellem 0 og 1, samt at, selv naar $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right) \Delta n\right]$ bestandig er negativ, saa har dette Udtryk dog stedse sin mindste Værdi for en vis Værdi af n beliggende mellem $n = 0$ og $n = 1$.

Dette fremgaaer imidlertid mere bestemt ved en Betragtning af Formlerne (31) og (33) eller maaskee simplest ved at gaae ud fra Formlen (38), som let kan skrives under Formen:

$$\frac{d\lambda}{dU} = \frac{1}{g\alpha} \cdot \frac{n^3 \cdot \frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1}{n^3 - 1}, \dots \dots \dots (46)$$

hvoraf ved Differentiation findes:

$$\frac{d^2\lambda}{dU^2} = \frac{3 \cdot n^2}{g\alpha \cdot U_p} \cdot \frac{1 - \frac{g\alpha}{\text{tg } \omega}}{(1 - n^3)^2}; \dots \dots \dots (47)$$

thi af disse Formler er det klart, at naar λ er positiv, saa bliver den et Maximum ved den Fyldningsgrad af Ledningen, som svarer til $n = n_m$, idet vi sætte:

$$n_m = \sqrt[3]{\frac{tg \omega}{g \alpha}} \dots \dots \dots (48).$$

Men da Maximum af λ svarer til Ledningens Udmunding, saa kan Vandstrømmens Dybde i Udløbet fremstilles ved:

$$U_m = \sqrt[3]{\frac{1}{g \cos \omega} \cdot \left(\frac{q}{d}\right)^2}, \dots \dots \dots (49)$$

hvilket Udtryk ogsaa findes ligefrem, ifølge Formlerne (27) og (37).

Søge vi derefter Længden af Ledningen fra Udløbet indtil det Punkt, hvor Vandspeilet er parallelt med Ledningens Bund, altsaa fra det Punkt, hvor $n = 1$, til det Punkt, hvor $n = n_m$, saa finde vi, ifølge Formlen (43), at denne Længde er uendelig stor. Vi kunne imidlertid atter her bemærke, at, endskjøndt denne Afstand theoretisk er uendelig stor, og der strengt taget altsaa ikke findes noget Punkt, hvori den betragtede Strøms Vandspeil er parallelt med Ledningens Bund, saa er Afbigelsen fra Parallelstrømmens retlinede Vandspeil, i en vis endelig Afstand fra Ledningens Udmunding, dog saa lille, at den er forsvindende; ja, vi kunne endog paastaae, at i Virkeligheden indtræder Parallellismen aldeles fuldstændig, eftersom de sidste Spor af en Afbigelse derfra maae tabe sig paa Grund af de Ujevnheder, som selv den nøiagtigst forarbejdede Ledning frembyder.

Længden af Ledningen fra Udmundingen opad imod det Punkt, hvor Vandspeilet bliver parallelt med Ledningens Bund, kan fremstilles ved Formlen (43), idet man for n_0 og Δn_0 vælger de Værdier, der svare til det Punkt af Vandspeilet, hvor dette ansees for at være parallelt med Ledningens Bund, og hvorfor vi t. Ex. kunne vælge det Punkt, hvor $n_0 = 0,99$ og $\Delta n_0 = -2,35$, imedens vi for n og Δn vælge de Værdier, der svare til Udløbet, nemlig $n = n_m$ samt den tilsvarende Værdi af Δn . Af det Udviklede vil det være indlysende, at den hele ved Nr. II betegnede Classe af Tilfælde, deler sig i følgende to særskilte Classer, nemlig i: II. a, indbefattende de Tilfælde, hvori $u < u_p$, $g \alpha > tg \omega$, og $1 > n > n_m$, samt i: II. b, indbefattende de Tilfælde, hvori $u < u_p$, $g \alpha > tg \omega$ og $1 > n_m > n$.

Vandspeilsformen, som vi ovenfor have betragtet, der svarer til den første af disse to Classer af Tilfælde, har jeg fremstillet ved Fig. 2 paa Plan I, og det er indlysende, at denne Form bl. A. maa fremtræde, naar Ledningens Fald eller $tg \omega < g \alpha$ og Vandet tilstrømmer fra et Indløbsbassin igjennem en Stigbordsaabning, der er afpasset saaledes, at den indstrømmende Vandmængde er ligestor med Parallelstrømmens Vandføring. Men der gives dog visse Tilfælde, hvor den angivne Vandspeilsform Fig. 2 ikke vil danne sig, endskjøndt $tg \omega < g \alpha$ og $u < u_p$, og det er navnlig, naar Betingelsen II. b. er tilfredsstillet. Tænke vi os, at denne Betingelse er opfyldt, saa er det nemlig klart af det Foregaaende,

at λ er voxende fra $n = 0$ til $n = n_m$, og tage vi da det Punkt af Ledningen, hvor Vanddybden er $= 0$, til Coordinaternes Begyndelsespunkt, det vil sige, sætte vi $n_0 = 0$ og $\lambda_0 = 0$, altsaa $\Delta n_0 = -0,3$, saa reducerer Formlen (43) sig atter til Formlen (45). Soges nu Længden af hele Ledningen fra $n = 0$ til $n = n_m$, saa finde vi denne Længde ved i Formlen (45) at indsætte $n = \sqrt[3]{\frac{\text{tg } \omega}{g\alpha}}$ og den tilsvarende Værdi for Δn , og det vil da let sees, ifølge Tabel 2, at λ stedse bliver en endelig Størrelse. Men idet denne Længde altsaa er afhængig af Ledningens Vandføring og Fald, saa er det klart, at den ikke kan vælges vilkaarligt, naar hine Størrelser ere givne, og Betingelsen for, at den heromhandlede Vandspeilsform skal danne sig, er derfor den, at Afstanden imellem Ledningens Indløb og dens Udløb ikke maa overskride ovenomtalte Værdi af λ . Tænkes Ledningens Fald α : $\text{tg } \omega < g\alpha$, samt at der igjennem en uendelig lille Stigbordsaabning strømmer Vand ind i Ledningen fra et Indløbsbassin under en uendelig stor Trykhøide, saa vil Strømmen, under dens Bevægelse fremad i Ledningen stemme sig mere og mere op i denne efterhaanden som Indstrømningshastigheden taber sig paa Grund af Ledningsmodstanden, og naar Ledningens Længde da ikke overskrider det Maximum af λ , som ifølge Formlen (45) svarer til $n = \sqrt[3]{\frac{\text{tg } \omega}{g\alpha}}$, saa er det tydeligt, at den søgte Vandspeilsform, som jeg har affundet ved Figur 3 paa Plan I, maa fremtræde. Har Ledningen derimod en større Længde end den, der svarer til dette Maximum af λ , saa er Vandspeilsformen Fig. 3 umulig, og i dette Tilfælde vil derfor Vandspeilsformen Fig. 2 gjøre sig gjældende; thi da disse to Vandspeilsformer ere de eneste, som kunne fremtræde under den almindelige Betingelse II, $u < u_p$ og $\text{tg } \omega < g\alpha$, saa er det indlysende, at, hvis den ene af disse Former er umulig under visse Forhold, maa Strømmen under disse Forhold antage den anden Form. Jeg har her paaviist, at naar Vandet strømmer ind i Ledningen igjennem en uendelig lille Stigbordsaabning med en uendelig stor Begyndelseshastighed og Ledningen ikke har for stor en Længde, saa vil Vandspeilsformen Fig. 3 danne sig; men det er let at see, at ogsaa, naar Begyndelseshastigheden er en endelig Størrelse, vil Vandspeilsformen Figur 3 fremtræde, saafremt blot Ledningen ikke har for stor en Længde. Er nemlig Indstrømningshastigheden en endelig Størrelse, saa maa ogsaa Stigbordsaabningen være en endelig Størrelse, og antages Stigbordstrækket at være givet, saa kan man ligefrem, ifølge Formlen (45), ved for n og Δn at indsætte de Værdier, som svare til Stigbordstrækket, bestemme den Længde $CG = \lambda_0$, som maa bortskjæres af den fuldstændige Vandspeilsform, der er fremstillet i Figur 3, for at erholde den Deel af samme, som da vil svare til de forhaandenværende Forhold.

Det her Udviklede vil jeg søge at belyse ved et Par Exempler.

- 1) Lad os tænke os en Muurværks Ledning, hvis Fald $= \text{tg } \omega = 0,001$, og lad

os foreløbig antage, at Strømmens Middelastighed omtrent er 4 Fod pr. Secund, saa kunne vi midlertidigt sætte $g\alpha = 0,0028$. Naar Vandet nu antages at strømme igjennem Ledningen som en Parallelstrøm og Ledningen udmunder frit, saa have vi ifølge

Formlen (39), $U_p = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\sin \omega} \left(\frac{q}{d}\right)^2} = 0,45 \left(\frac{q}{d}\right)^{\frac{2}{3}}$, og da vi fremdeles have $\left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega}\right) = 2,8$, saa

finde vi ifølge (48) $n_m = \sqrt[3]{\frac{\text{tg } \omega}{g\alpha}} = 0,71$ svarende til Ledningens Udløb, og ifølge Tabel 2

see vi, at den tilsvarende Værdi af $\Delta n = -1,08$. Søges altsaa Længden af Ledningen fra Udløbet indtil et Punkt i samme, hvor Vandspeilet ikke afviger mere fra Parallelstrømmens Vanddybde end $\frac{1}{100}$ af denne Dybde, saa finde vi den søgte Længde, ved i Formlen (43) at indsætte $n = 0,71$ og $\Delta n = -1,08$ samt $n_0 = 0,99$ og $\Delta n_0 = -2,35$; udføres Beregningen, erholdes:

$$(\lambda - \lambda_0) = 164 \left(\frac{q}{d}\right)^{\frac{2}{3}} [-0,782 + 2,286] = 246 \cdot \left(\frac{q}{d}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Men antage vi da fremdeles, at Ledningen har en Vandføring af 5 Cbfod pr. Secund pr. Fods Brede af Strømmen, saa finde vi den søgte Længde at være $(\lambda - \lambda_0) = 719$ Fod. Parallelstrømmens Vanddybde finde vi i dette Tilfælde at være $U_p = 1,316$ Fod og Parallelstrømmens Hastighed er altsaa 3,8 Fod pr. Secund. Vanddybden i Udløbsaabningen $U_m = n_m \cdot U_p$, idet $n_m = 0,71$, udgjør saaledes kun 71 pCt. af Parallelstrømmens Vanddybde eller $U_m = 0,934$ Fod, og Udstømningshastigheden bliver derfor 5,35 Fod. Middelastigheden vil altsaa noget nær, som foreløbig antaget, være 4 Fod.

2) Lad os dernæst antage, at baade Vandledningen og Vandføringen ere uforandrede, men at Vandet strømmer ind igjennem et Stigbord, hvis Høide er saadan, at Straalen i Stigbordsaabningen har en Dybde, der er mindre end U_m , f. Ex. $U_0 = 0,5$ Fod; saa have vi $0,5 = n_0 \cdot U_p$, hvoraf $n_0 = \frac{0,5}{U_p} = 0,38$, og altsaa ifølge Tabel 2, at $\Delta n_0 = -0,69$.

Indsætte vi disse Værdier tilligemed $n = n_m = 0,71$, svarende til Maximumslængden af Ledningen, samt den dertil svarende Værdi $\Delta n = -1,08$ i Formlen (43), saa finde vi den største Længde af Ledningen, hvorved Vandspeilsformen Fig. 3 overhovedet kan danne sig, at være $(\lambda - \lambda_0) = 106$ Fod. Har Ledningen en mindre Længde, vil Vandspeilsformen Fig. 3 ikke derved forandres, uden forsaavidt en vis Deel MF hiinsides Udløbsaabningen falder bort. Antages t. Ex., at Ledningen har en Længde af 74 Fod, saa vil Vandspeilet i Udløbsaabningen ligge i en Høide $MN = 0,75$ Fod over Ledningens Bund og Vandets Udstømningshastighed vil altsaa være $6\frac{2}{3}$ Fod pr. Secund. Hvis Ledningens Længde er større end 106 Fod, saa vil Vandstrømmen bevæge sig under Formen Fig. 2. Søge vi endelig den Længde $CG = \lambda_0$, som i det betragtede specielle Tilfælde er afskaaret af den

fuldstændige Vandspeilsform (Fig. 3), saa finde vi denne Længde, idet vi for n og Δn sætte Værdierne 0,38 og $-0,69$, at være $\lambda_0 = 174$ Fod.

Efter saaledes under I. og II. at have bestemt de forskellige Vandspeilsformer, som kunne danne sig, naar Betingelsen $u < u_p$ er tilstede, gaae vi over til at bestemme de Vandspeilsformer, som kunne danne sig i Ledningen under Betingelsen $u > u_p$, og ville til den Ende begynde med at undersøge de Tilfælde, som henhøre under Betingelsen III, $n > 1$ og $\text{tg } \omega > g\alpha$.

Vi bemærke da først, at naar n voxer fra 1 til ∞ , saa aftager Δn fra $\div \infty$ til $\div 0,905$, og deraf følger ikke alene, at baade $\left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right) \cdot \Delta n$ og altsaa ogsaa $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \div 1\right) \cdot \Delta n\right]$ ere bestandig positive for alle mulige Værdier af n fra $n = 1$ til $n = \infty$, men tillige, at $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \Delta n\right]$ er uendelig stor ved begge de nævnte Grændser. Imellem disse Grændser er dette Udtryk derimod endeligt, og deraf indsees, at det maa have et Minimum, og at Værdien λ maa have et Minimum for en vis Værdi af n , beliggende mellem 1 og ∞ . Dette fremgaaer imidlertid endnu bestemtere af Formlerne (46) og (47), som vise, at λ er et Minimum for $n = n_m$, Formel (48). Tage vi nu det Punkt af Ledningen, for hvilket λ er et Minimum, til Coordinaternes Begyndelsespunkt, idet vi sætte $n_0 = n_m$ og $\lambda_0 = 0$, saa vil Formlen (43) kunne skrives:

$$\lambda = \frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} (n - n_m) + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1 \right) (\Delta n - \Delta n_m) \right] \dots \dots \dots (50)$$

Denne Formel viser, at der til een og samme Værdi af λ svarer to Værdier af n , eller, at der til samme Vandføring svarer to forskellige Vandspeilsformer, begge henhørende under den betragtede tredje Classe af Tilfælde, den ene Form svarende til Værdier af $n < n_m$ og den anden Form svarende til Værdier $n > n_m$, hvilke forskellige Former vi nu ville undersøge hver for sig under III, a og III, b.

Betragte vi da først den Vandspeilsform, som svarer til Tilfældet III, a, hvori $g\alpha < \text{tg } \omega$ og $1 < n < n_m$, saa viser det sig, at λ voxer i det Uendelige, naar n aftager fra n_m til 1; men ved dernæst at betragte Tabel 2 viser det sig tillige, at endskjøndt n først fuldstændig bliver $= 1$ for en uendelig stor Afstand (λ) og uagtet Strømmen altsaa først fuldstændig bliver parallel med Bunden af Ledningen for $\lambda = \infty$, saa nærmer n sig dog meget snart saaledes til Grændseværdien 1 og Strømmens Vandspeil sig til at blive parallel med Ledningens Bund, at Forskjellen ved en vis endelig Afstand λ kan gøres saa lille som man vil. Overveie vi dernæst Betydningen af den Omstændighed, at de positive Værdier af λ have et Minimum, saa bliver det indlysende, at Ledningens Indløb vel kan falde i den positive Retning fra Coordinaternes Begyndelsespunkt, men derimod aldrig i den negative; i det yderste Tilfælde kan det falde sammen med Coordinaternes Begyndelsespunkt. Tænke

vi os, at Ledningens Indløb falder sammen med det omtalte Minimumspunkt, saa viser det sig let, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen III, a, kan fremstilles ved Figur 4 paa Plan 1, samt at denne Vandspeilsform maa danne sig naar Ledningen udgaaer fra et Indløbsbassin, hvori Vandet er i Hvile og hvorfra det, uden Contraction, frit strømmer ind, og fortsætter sin Vei igjennem Ledningen, hvis Fald $= \text{tg } \omega > g \alpha$. Nærværende Vandspeilsform, Fig. 4, svarer altsaa paa en Maade til Vandspeilsformen Fig. 1, idet de begge fremtræde i Ledninger med samme Fald; men de ere forskellige deri, at Formen Fig. 4 fremtræder, naar Vandet fra Indløbsbassinet træder ind i Ledningen med en Begyndelseshastighed, der er mindre end Parallelstrømmens Hastighed, hvilken Strømmen først efterhaanden opnaaer ved Tyngdens Virkning, hvorimod Formen Fig. 1 danner sig, naar Vandet strømmer ind i Ledningen igjennem en indskrænket Stigbordsaabning med en Hastighed, der er større end Parallelstrømmens Hastighed.

Tænke vi os derimod, hvad der vel i Virkeligheden stedse vil finde Sted i større eller mindre Grad, at Vandet i Indløbsbassinet strømmer hen til Ledningens Munding og ankommer dertil med en Begyndelseshastighed, som er mindre end Parallelstrømmens Hastighed, eller at Vandet strømmer ind i Ledningen fra et Bassin, hvori det staaer opstemmet over Indløbet, saa vil saadant ikke videre forandre Vandspeilets Form i Ledningen; kun vil den Forskjel indtræde, at en Deel EM af den fuldstændige Vandspeilsform, Fig. 4, bortfalder, idet Vandet træder ind i Ledningen med den Hastighed, som svarer til Strømhastigheden i et vist Profil MN af den fuldstændige Vandspeilsform.

Den Vandspeilsform, som i Reglen vil danne sig i Indløbet fra et Bassin, hvori Vandet ikke staaer opstemmet over Stigbordsaabningen, har jeg fremstillet ved Fig. 4, a paa Plan II.

Til Exempel vil jeg atter her betragte det først behandlede specielle Tilfælde og antage, at Ledningen har et Fald bestemt ved $\text{tg } \omega = 0,008$, samt en Vandføring $\left(\frac{q}{\delta}\right) = 5$ Cbfod pr. Secund pr. Fods Brede af Ledningen. Antage vi da atter at $g \alpha = 0,003$, saa have vi som forhen $\frac{g \alpha}{\text{tg } \omega} = 0,375$ og $U_p = 0,23 \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,67$ Fod og finde derved $n_m = \sqrt[3]{\frac{\text{tg } \omega}{g \alpha}} = 1,387$ samt $\Delta n_m = -1,218$. Soges nu Længden af Ledningen fra dens Indløb til et Punkt, hvor Vandspeilet ikke afviger mere end $\frac{1}{100}$ fra Stillingen af Parallelstrømmens Vandspeil, — i hvilket Punkt vi følgelig kunne betragte Vandspeilet som virkelig parallelt med Ledningens Bund, — saa sætte vi $n = 1,01$, og, ifølge Tabel 2, $\Delta n = -2,36$; vi finde da den søgte Længde, ifølge Formlen (50), at være

$$\lambda = 127 \text{ Fod.}$$

Vanddybden i Indløbsaabningen, svarende til Formen Fig. 4, er udtrykt ved $U_m = n_m \cdot U_p = 0,925$ Fod.

Herfra ville vi nu forsøge paa at bestemme den Vandspeilsform, som svarer til Betingelsen III, b, nemlig $g\alpha < \text{tg } \omega$ og $n > n_m > 1$.

Det viser sig da strax ved en Betragtning af Formlen (50), at λ voxer i det Uendelige, naar n voxer fra n_m i det Uendelige, og bemærke vi derhos, at $(\Delta n - \Delta n_m)$ stedse er en positiv Størrelse, som voxer fra Nul til en vis endelig Grændse, naar n voxer i det Uendelige, saa følger deraf let, ved en Betragtning af Formlen (44), at Trykhøidetabet eller Vandspeilets Sænkning $(y - y_m)$ er bestandig negativ, voxende fra Nul til en vis endelig Grændseværdi, naar n voxer fra n_m i det Uendelige. Det er altsaa klart, at Strømmens Vandspeil er i stadig Stigning og heelt og holdent ligger over det horizontale Plan, som kan lægges igjennem det Punkt af Vandspeilet, som svarer til Minimum af λ , og fremdeles, at nævnte Vandspeil fra Indløbsaabningen stadigt hæver sig imod en vis horizontal Grændseplan, som Vandspeilet dog først fuldstændig naaer for $n = \infty$. Men ved at betragte Tabel 2 viser det sig paa den anden Side let, at endskjøndt $(y - y_m)$ først naaer den omhandlede Grændseværdi for en uendelig stor Værdi af λ , saa nærmer den sig dog saa hurtigt til samme, at Afvigelsen derfra meget snart bliver forsvindende lille; og deraf følger altsaa, at Vandspeilet, der theoretisk talt først for en uendelig Værdi af λ bliver fuldstændig horizontalt, dog i en vis bestemt endelig Afstand, uden mærkelig Feil, kan betragtes som horizontalt og som faldende sammen med det omtalte Asymptote-Plan til Vandspeilet. Tænke vi os Indstrømningsaabningen til Ledningen fast bestemt ved Underkanten af et Stigbord, og Vandet i Indløbsbassinet bestandig at have en saadan Trykhøide, at Indstrømningshastigheden og dermed ogsaa Vandføringen forblive uforandrede, uagtet Vandet i Afløbsbassinet opstemmes til en Høide, hvorved den naturlige Vandspeilsform bliver umulig, saa vil den heromhandlede Vandspeilsform, som jeg har afbildet paa Plan II Figur 5, fremtræde. Den Stigning, som Vandspeilet erhoder efter at have passeret Stigbordsaabningen, hidrører naturligviis fra den levende Kraft, hvormed Vandet passerer Stigbordsaabningen. Af Tabel 2 vil det sees, at naar $n = 7$, altsaa i et Punkt af Strømmen, hvor Vanddybden i Ledningen er 7 Gange større end Vanddybden i Parallelstrømmen, svarende til Vandspeilsformen Fig. 4, vil Vandspeilet ikke afvige mere end $\frac{1}{100}$ af Parallelstrømmens Vanddybde (U_p) fra det omtalte Asymptote-Plan. Antage vi atter som Exempel, at Ledningens Fald lig $\text{tg } \omega = 0,008$, at $\left(\frac{q}{\delta}\right) = 5$ Cbfod, at $g\alpha = 0,003$, altsaa $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} = 0,375$ og $U_p = 0,67$, $n_m = 1,387$ og $\Delta n_m = -1,218$, saa er Høiden af Stigbordsaabningen altsaa $U_m = n_m \cdot U_p = 0,925$ og Indstrømningshastigheden = 5,25 Fod. Vi finde da Høiden af Vandstanden ved Enden af Ledningen over Vandspeilet i Stigbordsaabningen, ifølge Formlen (44) at være

$$(y_0 - y) = 0,347 \text{ Fod.}$$

Ville vi dernæst bestemme den Afstand fra Stigbordsaabningen, hvor Strømmens

Vandspeil ikke ligger mere end $\frac{1}{100}$ af Parallelstrømmens Vanddybde under Grændseplanen for Vandspeilet, saa finde vi denne Længde ifølge Formlen (50) fremstillet ved $\lambda = 425$ Fod.

Vi gaae nu herfra over til at betragte den 4de og sidste Classe af Tilfælde, nemlig den, som er bestemt ved Betingelsen IV eller $g\alpha > \text{tg } \omega$ og $n > 1$.

Det sees da først, at eftersom $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} > 1$ og $n > 1$, saa er $\left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \Delta n$ negativt aftagende fra $-\infty$ indtil $\div 0,905 \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right)$, naar n voxer fra 1 til ∞ , og deraf følger, at Udtrykket $\left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} n + \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} - 1\right) \Delta n\right]$ gjennemløber alle Værdierne fra $\div \infty$ til $+\infty$, naar n voxer fra 1 til ∞ . Gaae vi altsaa ud fra et vilkaarligt Punkt af Vandspeilet, hvis Coordinater ere λ_0 og u_0 , da see vi let, ifølge Formlen (43), at, naar n voxer i det Uendelige, saa voxer Afstanden $(\lambda - \lambda_0)$ fra Nul til ∞ , ligesom ogsaa, at naar n aftager fra n_0 til 1, saa voxer Afstanden $(\lambda - \lambda_0)$ negativt fra Nul til $\div \infty$, og betragte vi Formlerne (43), (46) og (47) lidt opmærksomt, vil det let sees, at den søgte Vandspeilsform vil være fremstillet ved den paa Plan. II angivne Fig. 6. Af Formlen (44) sees fremdeles, at hvis vi tage $n_0 = 1$, altsaa $\Delta n_0 = -\infty$, saa vil den perpendicularære Afstand $(y - y_0)$ imellem det betragtede Punkt, hvor Vandspeilet er parallelt med Ledningens Bund, og et hvilket som helst andet Punkt af Strømmen, hvis Vanddybde er nok saa lidt forskjellig fra Parallelstrømmens Vanddybde, blive uendelig stor; men det sees da tillige, at, naar vi gaae ud fra Vandspeilet i et Punkt, hvis Vanddybde er nok saa lidt større end Parallelstrømmens Vanddybde, saa vil Høideforskjellen $(y - y_0)$ imellem dette og et hvilket som helst Punkt af Ledningens frie Vandspeil nærmere ved Udløbet være en endelig Størrelse, som stedse er positiv, og heraf fremgaaer, at Strømmens Vandspeil, uagtet det hæver sig mere og mere over Ledningens Bund, dog bestandig sænker sig dybere for større og større positive Værdier af λ . Men Formlen (44) viser tillige, at $(y - y_0)$ convergerer imod en vis Grændseværdi, naar n voxer i det Uendelige, hvilken Grændseværdi svarer til Vandstandsdifferenten imellem det betragtede Punkts og Afløbsbassinets Vandspeil, der er Aarsag i at denne Vandspeilsform fremtræder. Den omhandlede Vandspeilsform danner sig, naar Vandspeilet i Afløbsbassinets opstemmes til en større Høide end den, der svarer til Parallelstrømmens Fyldningsgrad, og Ledningens Fald, udtrykt ved $\text{tg } \omega$, er $< g\alpha$. Denne Vandspeilsform fremtræder altsaa ved samme Fald af Ledningen som Vandspeilsformen Fig. 2, og danner et Supplement til denne derved, at Formen Fig. 6 fremtræder i de Tilfælde, hvor Formen Fig. 2 paa Grund af en Opstemning af Vandet i Afløbsbassinets ikke kan danne sig.

Med Hensyn paa Vandspeilsformen Fig. 6 er det ofte af særlig Interesse at

kunne bestemme, hvor langt Opstuvningen fra Afløbsbassinet virker op i Ledningen, og derfor ville vi her nærmere undersøge dette Forhold.

Først bemærke vi, som alt berørt, at Afstanden fra det Punkt af Ledningen, hvori Vandspeilet ophører at være parallelt med Ledningens Bund, theoretisk talt er uendelig stor; men dernæst tillige, at Afstanden fra Ledningens Udløb til et Punkt, hvor Vandspeilet f. Ex. kun afviger $\frac{1}{100}$ af Parallelstrømmens Dybde fra Parallelstrømmens Vandspeilsplan, er en endelig Størrelse, som kan beregnes ifølge Formlen (43). Lad os antage, at Ledningen er af Muurværk, at den har et Fald $= \operatorname{tg} \omega = 0,001$, ligesom i det Exempel, vi have behandlet for at belyse Vandspeilsformen Fig. 2, samt at dens Vandføring er 5 Cbfod pr. Secund for hver Fods Brede af Ledningen; vi finde da Parallelstrømmens Vanddybde at være $U_p = 1,316$ Fod, $g\alpha = 0,0028$ og $\frac{g\alpha}{\operatorname{tg} \omega} = 2,8$. Tænke vi os da Vandet opstemmet for Udløbet af Ledningen til en Høide $U = 3$ Fod over Ledningens Bund, og bestemme vi den tilsvarende Fyldningsgrad n ifølge (41) $n = \frac{U}{U_p} = \frac{3}{1,316} = 2,28$, saa finde vi ved Hjælp af Tabel 2, at $\Delta n = -1,008$. Antage vi nu $n_0 = 1,01$, altsaa $\Delta n_0 = -2,36$, og indsætte vi alle disse Værdier i Formlen (43), saa finde vi den søgte Længde, hvortil Opstemningen virker tilbage i Ledningen, at være:

$$(\lambda - \lambda_0) = 2813 \text{ Fod.}$$

I det Foregaaende have vi undersøgt, hvilke forskellige Vandspeilsformer der kunne danne sig i den prismatiske Ledning, som har et rectangulært Tversnit, hvis Brede er forholdsviis stor imod Vandstrømmens Dybde, naar Ledningen har Fald i den Retning, hvori Strømmen bevæger sig, og have derved seet, at der i det Hele gives 6 forskellige Vandspeilsformer, hvorunder Strømmen kan bevæge sig. Men det Tilfælde kan ogsaa forekomme, at Ledningen enten intet Fald har, eller at den har Fald i modsat Retning af den, hvori Strømmen bevæger sig igjennem Ledningen, og derfor ville vi nu søge at bestemme, hvilke Vandspeilsformer der kunne danne sig i et saadant Tilfælde.

Af den Betydning, som vi i det Foregaaende have tillagt Vinklen ω er det klart, at de udviklede Formler ikke blot gjælde for Ledninger, der have Fald i Strømmens Retning, men at de tillige ere gjældende for saadanne Ledninger, der enten intet Fald have eller have Fald i modsat Retning af den, hvori Strømmen bevæger sig. Formindske vi nemlig Ledningens Fald mere og mere i Retning af Strømmen, indtil Faldet bliver Nul, saa aftager Heldningsvinklen ω samtidig til Nul, og sænkes fremdeles Ledningens Indløb efterhaanden dybere ned, imedens Udløbet beholder sin Høidebeliggenhed, saa voxer ω negativt. Heraf fremgaaer altsaa, at vi for det Tilfælde, at Ledningen har Fald i modsat Retning af Strømmen, kun behøve at forandre ω til $(\div \omega)$ i de tidligere Formler for at erholde de Formler, som gjælde for det Tilfælde, at Ledningen har en Stigning i Retning af Vandets Bevægelse.

Men naar ω forandres til $(\div \omega)$, saa forandres derved u_p , Formel (39), til $(-u_p)$ og da u og u_p skulle have samme Fortegn, maae vi naturligtviis i Formlen (41) forandre n til $(-n)$.

Naar vi altsaa i Formlerne (42), (43), (44), (46) og (47) indsætte $(-\omega)$ og $(-n)$ istedetfor ω og n , saa finde vi følgende Formler, gjældende for Ledninger, som have en Stigning i Retning af Vandets Bevægelse.

$$\Delta n = \frac{1}{3} \left[\text{Log} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \sqrt{3} \cdot \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2n-1}{\sqrt{3}} \right) \right] \dots \dots \dots (51)$$

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} (n - n_0) - \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} + 1 \right) (\Delta n - \Delta n_0) \right] \dots \dots \dots (52)$$

$$y - y_0 = -\frac{U_p}{g\alpha} (g\alpha \cos \omega + \sin \omega) (\Delta n - \Delta n_0) \dots \dots \dots (53)$$

$$\frac{d\lambda}{dU} = -\frac{1}{g\alpha} \frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \dots \dots \dots (54)$$

$$\frac{d^2\lambda}{dU^2} = -\frac{3n^2}{g\alpha U_p} \cdot \frac{1 + \frac{g\alpha}{\text{tg } \omega}}{(n^3 + 1)^2} \dots \dots \dots (55)$$

hvorved jeg skal bemærke, at U_p og u_p beregnes ganske efter Formlerne (39), idet den deri forekommende Vinkel ω fremdeles, som i de tidligere Tilfælde, betegner Ledningens Heldningsvinkel taget i første Quadrant, og Fyldningsgraden n bestemmes ved Formlerne (41) ligesom tidligere. Af Formlerne (51) og (52) sees først, at, naar λ er reel for en vis Værdi af n , saa er den tillige reel for alle Værdier af n ligefra $n=0$ til $n=\infty$, og deraf fremgaaer, at de Vandspeilsformer, som kunne fremtræde ved Ledninger, der have Fald i modsat Retning af Strømmens Bevægelse, maae være væsentligt forskellige fra de Former, som kunne fremkomme ved Ledninger, der have Fald i Retning af Strømmens Bevægelse. Naar vi dernæst sammenligne Formlerne (52), (54) og (55), saa viser det sig, at λ har et Maximum eller et Minimum, alt eftersom man vælger et forskjelligt Udgangspunkt og derved betragter λ som positiv eller negativ, samt at dette Maximum- eller Minimumspunkt, der svarer til Ledningens Udmunding, falder ved en Fyldningsgrad $n_m = \sqrt[3]{\frac{\text{tg } \omega}{g\alpha}}$, idet ω er Ledningens Heldningsvinkel taget i første Quadrant, ganske som i de tidligere Tilfælde. Tage vi derfor Ledningens Udmunding til Udgangspunkt og sætte $\lambda_0 = 0$ og $n_0 = n_m$, saa kan Formlen (52) skrives:

$$\lambda = -\frac{U_p}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} (n - n_m) - \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} + 1 \right) (\Delta n - \Delta n_m) \right] \dots \dots \dots (56)$$

Betegn vi dernæst den Værdi af λ , som svarer til $u=0$, ved λ_1 , saa er det indlysende af ovenstaaende Formel, at der til alle Værdier af λ , som ere mindre end λ_1 , svarer to Fyldningsgrader, den ene for $n > n_m$ og den anden for $n < n_m$, hvorimod der til

alle Værdier af $\lambda > \lambda_1$ kun svarer een Fyldningsgrad, $n > n_m$, ved en given Vandføring. Heraf følger altsaa, at, naar den betragtede Ledning har en Længde, der er større end λ_1 , saa existerer der, for en bestemt Vandføring, kun een Vandspeilsform for Strømmen; men naar Ledningens Længde derimod er mindre end λ_1 , saa kan Strømmen have samme Vandføring under to forskellige Vandspeilsformer, hvoraf den ene svarer til en Fyldningsgrad, som heelt igjennem er større end n_m , den anden til en Fyldningsgrad, som heelt igjennem er mindre end n_m , og det er tilmed ikke vanskeligt at see, at, naar Punktet C betegner Coordinaternes Begyndelsespunkt, CU Ordinataxen og CD' den negative Abscisseaxe, saa kan den første Vandspeilsform, svarende til $n > n_m$, fremstilles ved FME , Fig. 7 Plan II, og den anden Vandspeilsform, svarende til $n < n_m$, fremstilles ved FME , Fig. 8 Plan III, idet CD' betegner Ledningens Bund og CE Ledningens Udmunding.

Til Lettelse ved forefaldende Beregninger har jeg i den efterfølgende Tabel 3, ifølge Formlen (51), angivet Værdien af Δn for en Række af Værdier af n , svarende til de herhen hørende Ledninger, der have en Stigning i Strømmens Retning, og denne Tabel vil altsaa være at benytte for disse Ledninger paa samme Maade, som Tabel 2 i det Foregaaende benyttes ved Beregningen over rectangulære Ledninger, der have Fald i Strømmens Retning.

Tabel 3.
Beregnet ifølge Formlen (51). Stigende rectangulære Vandledninger.

| n | Δn | n | Δn | n | Δn | n | Δn | n | Δn |
|------|------------|------|------------|------|------------|------|------------|----------|------------|
| 0,00 | — 0,502 | 0,54 | 0,054 | 0,68 | 0,552 | 1,05 | 0,560 | 2,50 | 0,816 |
| 0,02 | — 0,282 | 0,56 | 0,052 | 0,70 | 0,547 | 1,10 | 0,582 | 2,40 | 0,822 |
| 0,04 | — 0,262 | 0,58 | 0,070 | 0,72 | 0,562 | 1,15 | 0,602 | 2,50 | 0,828 |
| 0,06 | — 0,242 | 0,40 | 0,088 | 0,74 | 0,576 | 1,20 | 0,622 | 2,60 | 0,834 |
| 0,08 | — 0,222 | 0,42 | 0,106 | 0,76 | 0,590 | 1,25 | 0,640 | 2,70 | 0,839 |
| 0,10 | — 0,205 | 0,44 | 0,126 | 0,78 | 0,404 | 1,50 | 0,658 | 2,80 | 0,844 |
| 0,12 | — 0,185 | 0,46 | 0,146 | 0,80 | 0,418 | 1,55 | 0,675 | 2,90 | 0,848 |
| 0,14 | — 0,165 | 0,48 | 0,165 | 0,82 | 0,432 | 1,40 | 0,688 | 3,00 | 0,852 |
| 0,16 | — 0,145 | 0,50 | 0,185 | 0,84 | 0,444 | 1,45 | 0,700 | 3,50 | 0,870 |
| 0,18 | — 0,125 | 0,52 | 0,200 | 0,86 | 0,456 | 1,50 | 0,712 | 4,00 | 0,880 |
| 0,20 | — 0,105 | 0,54 | 0,217 | 0,88 | 0,468 | 1,60 | 0,736 | 5,00 | 0,888 |
| 0,22 | — 0,084 | 0,56 | 0,234 | 0,90 | 0,480 | 1,70 | 0,754 | 6,00 | 0,894 |
| 0,24 | — 0,064 | 0,58 | 0,251 | 0,92 | 0,492 | 1,80 | 0,768 | 7,00 | 0,898 |
| 0,26 | — 0,044 | 0,60 | 0,268 | 0,94 | 0,504 | 1,90 | 0,780 | 8,00 | 0,900 |
| 0,28 | — 0,024 | 0,62 | 0,284 | 0,96 | 0,514 | 2,00 | 0,790 | 9,00 | 0,901 |
| 0,50 | — 0,004 | 0,64 | 0,500 | 0,98 | 0,524 | 2,10 | 0,800 | 10,00 | 0,902 |
| 0,52 | + 0,016 | 0,66 | 0,516 | 1,00 | 0,535 | 2,20 | 0,808 | | |
| 0,54 | 0,034 | 0,68 | 0,532 | 1,05 | 0,560 | 2,50 | 0,816 | ∞ | 0,907 |

Ved Hjælp af denne Tabel og Formlen (56) vil det være let at beregne Længden λ fra Udløbet til et hvilket som helst Punkt af Ledningen, hvis Fyldningsgrad er given, naar Ledningens Stigning samt Vandføringen $\left(\frac{q}{\delta}\right)$ er given.

Antages f. Ex., at Stigningen er bestemt ved $\text{tg } \omega = 0,008$, og at Vandføringen $\left(\frac{q}{\delta}\right) = 5$ Cbfod pr. Fods Brede af Strømmen, saa kan man deraf beregne den Længde λ_1 , som Ledningen ikke kan overskride, naar Vandspeilsformen Fig. 8 skal kunne fremtræde. Vi kunne her foreløbig, ligesom i Exemplet til Vandspeilsformen Fig. 1, antage, at $g\alpha = 0,0030$; $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} = 0,375$ samt, ifølge (48), $n_m = 1,387$, og finde da ifølge Tabel 3, at $\Delta n_m = 0,675$. Sættes endvidere $n = 0$, altsaa $\Delta n = \div 0,302$ erholdes $\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} (n - n_m) = -0,520$ samt $\div \left(\frac{g\alpha}{\text{tg } \omega} + 1\right) (\Delta n - \Delta n_m) = 1,343$, $\frac{U_p}{g\alpha} = 224,3$, og naar disse Værdier indsættes i Formlen (56), findes den søgte Længde af Ledningen at være $\lambda_1 = -184,6$ Fod. Naar Ledningens Længde ikke overskrider denne Størrelse, saa vil altsaa Vandspeilsformen Fig. 8 fremtræde, saafremt Vandets Indstrømningshastighed er uendelig stor; havde Ledningen en større Længde, saa vilde Vandspeilsformen Fig. 7 vise sig i alle Tilfælde, selv om Strømmen virkelig havde en uendelig stor Begyndelses-hastighed. Vandstrømmens Høide i Udløbsaabningen blev da $U_m = n_m \cdot U_p = 1,387 \times 0,67 = 0,929$ Fod.

Paa lignende Maade kunne vi let beregne Vanddybden $U = n \cdot U_p$ og den tilsvarende Afstand λ fra Udløbet for andre bestemte Fyldningsgrader af Ledningen. Som Exempel skal jeg nævne, at til

$$\begin{aligned} n = 1,2 & \text{ svarer } U = 0,804' \text{ og } \lambda = \div 0,67' \\ n = 1,0 & \text{ -- } U = 0,670' \text{ og } \lambda = \div 11,2' \\ n = 0,8 & \text{ -- } U = 0,536' \text{ og } \lambda = \div 29,8' \\ n = 0,7 & \text{ -- } U = 0,402' \text{ og } \lambda = \div 59,4' \\ n = 0,5 & \text{ -- } U = 0,333' \text{ og } \lambda = \div 76,9' \end{aligned}$$

hvoraf den tilsvarende Vandspeilsform lader sig construere. Antage vi, at denne Vandføring finder Sted ved et Stigbordstræk $U = 0,333$ Fod, altsaa, at Vandet strømmer ind i Ledningen med en Hastighed $= \frac{5,000}{0,333} = 15$ Fod, samt fremdeles, at Ledningens Længde er 50 Fod, saa finde vi Vandhøiden i Udløbet $= 0,56$ Fod og Strømhastigheden, hvormed Vandet forlader Ledningen, $= 9$ Fod. Strømmens Middel-hastighed vil altsaa omtrent blive 12 Fod, og Beregningen maatte altsaa gjentages, idet vi ifølge Tabel 1 for $g\alpha$ satte Værdien 0,0025 istedetfor 0,003, som vi ovenfor have benyttet; men hermed ville vi ikke opholde os, da Fremgangsmaaden forøvrigt er den samme, som ovenfor er fulgt.

Antage vi derimod, at Ledningen har saa stor en Længde, at Strømmen bevæger sig under Vandspeilsformen Fig. 7, hvor n voxer i det Uendelige samtidig med λ , saa er det klart, ifølge Tabel 3 i Forbindelse med Formlen (53), at Vandspeilet hæver sig stadigt til en større og større Høide samtidigt med at n voxer; men vi see tillige, at det nærmer sig mere og mere til et bestemt Horizontalplan, hvis Høide over Udløbets Vandspeil er bestemt ved Formlen (53), idet vi sætte $\Delta n = 0,907$, der ifølge Tabel 3 svarer til $n = \infty$.

I det betragtede specielle Tilfælde, hvor $\Delta n_0 = 0,675$, $\frac{U_p}{g\alpha} = 224,3$ og $(g\alpha \cos \omega + \sin \omega) = 0,011$ erholde vi, ifølge (53), Indløbets Vandspeilhøide over Udløbets Vandspeilhøide eller $(y_0 - y) = 0,573$ Fod. Vi see imidlertid tillige, at, endskjøndt Vandspeilet først fuldstændig bliver horizontalt for $\lambda = -\infty$, saa nærmer det sig dog meget hurtigt til den omtalte horizontale Grændseplan; thi Tabel 3 viser, at for $n = 10$ er $\Delta n = 0,902$, imedens den for $n = \infty$ er $= 0,907$; og deraf fremgaaer ifølge Formlen (53), at Vandspeilets Høide for $n = 10$ kun ligger $0,005 \frac{U_p}{g\alpha} (g\alpha \cos \omega + \sin \omega)$ under det nævnte Grændseplan, hvilken Afstand i det specielle Exempel kun beløber sig til 0,012 Fod. Vanddybden for dette Punkt af Strømmen er $n \cdot U_p = 6,7$ Fod, Strømhastigheden altsaa $= 0,75$ Fod, og Afstanden fra Udløbet til dette Punkt, ifølge (56), lig $\lambda = 653$ Fod.

Men hvad enten Ledningen har et Fald eller en Stigning, saa forudsætte Formlerne, at Heldningsvinklen ω , som iøvrigt kan være hvilken som helst, dog ikke maa være større, end at $\cos \omega$ er meget nær lig 1, og dernæst tillige, at denne Vinkel ikke absolut maa være Nul; thi i saa Fald blive nogle af de Elementer, hvoraf Integralet blev taget for at danne Formlen (40), uendeligt store, hvorved hele Integralet bliver uendeligt stort, og Formlen (40) altsaa ubrugelig. Men desuagtet er det dog let at see, hvad Resultatet vil blive i det specielle Tilfælde, hvor $\omega = 0$; thi da de udviklede Formler gjælde, om Ledningens Fald eller Stigning er nok saa lille, naar den blot ikke absolut er Nul, saa er det klart, at, da Vandspeilet i Tilfælde af, at ω er positiv, kun kan antage een af de tre Former, som ere angivne i det Foregaaende ved Figurerne 2, 3 og 6, og i Tilfælde af, at ω er negativ, kun kan antage enten Formen Fig. 7 eller Formen Fig. 8, saa maa Vandspeilsformen Fig. 2 falde sammen med Fig. 7 og Vandspeilsformen Fig. 3 falde sammen med Fig. 8, naar ω aftager til Nul, hvorimod Fig. 6 for en positiv Værdi af ω bliver enestaaende uden tilsvarende Form for en negativ Værdi af ω . Da nu denne Form tilmed maa forsvinde for $\omega = 0$, eftersom den gaaer ud fra et Vandspeil, som er parallelt med Ledningens Bund, hvilket for en horizontal Ledning svarer til en Vandføring $= 0$, saa er det aabenbart, at der for en horizontal Vandledning kun eksisterer to Vandspeilsformer, nemlig de to Former, som ere fremstillede paa Plan III ved Fig. 9 og 10.

Til dette Resultat kommer man ogsaa, naar man i Formlen (38) ligefrem sætter $\omega = 0$, hvorved denne reducerer sig til:

$$\frac{d\lambda}{dU} = \frac{1}{g\alpha} - \frac{U^3}{\alpha\left(\frac{q}{\delta}\right)^2}, \dots \dots \dots (57)$$

som integreret giver:

$$\lambda = C + \frac{U}{g\alpha} - \frac{U^4}{4\alpha\left(\frac{q}{\delta}\right)^2} \dots \dots \dots (58)$$

Ved Differentiation af (57) erhoides dernæst

$$\frac{d^2\lambda}{dU^2} = -\frac{3U^2}{\alpha\left(\frac{q}{\delta}\right)^2} \dots \dots \dots (59)$$

og af disse tre Formler sees det let, at de positive Værdier af λ have et Maximum svarende til $U = \sqrt[3]{\frac{1}{g}\left(\frac{q}{\delta}\right)^2}$, og da dette efter det tidligere Anførte svarer til Ledningens Udløb, saa vil Vandstrømmens Dybde U_m i Udløbet følgelig være fremstillet ved $U_m = \sqrt[3]{\frac{1}{g}\left(\frac{q}{\delta}\right)^2}$. Tage vi dette Punkt af Ledningen til Udgangspunkt, idet vi sætte $\lambda = 0$ for $U = U_m$, saa erholde vi ifølge (58)

$$\lambda = -\left[\frac{U_m - U}{g\alpha} - \frac{U_m^4 - U^4}{4\alpha\left(\frac{q}{\delta}\right)^2} \right] \dots \dots \dots (60)$$

hvor λ aabenbart er negativt voxende, baade for U aftagende fra U_m til Nul og for U voxende fra U_m til ∞ . Men det indsees tillige, at der til alle Værdier af λ , der ere mindre end den Værdi λ_1 , som antages at være Ledningens Længde fra Udløbet indtil det Punkt, hvor $U = 0$, maa svare to Vandspeilsformer til en og samme Vandføring $\left(\frac{q}{\delta}\right)$, nemlig een Form, for hvilken alle Vanddybder U ere mindre end U_m , og en anden, for hvilken U stedse er større end U_m , hvorimod der til alle Værdier af λ , der ere større end λ_1 , kun eksisterer een Vandspeilsform, for hvilken enhver Vanddybde U er større end U_m . Ved dernæst at sammenholde Formlerne (57), (59) og (60) vil man let overbevise sig om, at de to nævnte Vandspeilsformer ere aldeles identiske med de to ved Figurerne 9 og 10 angivne Former.

Til yderligere Oplysning skal jeg anføre, at hvis det antages, at vi for en given Længde λ have fundet, at Vandstrømmen har en Dybde U_1 , saa er efter Formlen (58)

$$\lambda = C + \frac{U_1}{2g} - \frac{U_1^4}{4\alpha\left(\frac{q}{\delta}\right)^2};$$

subtrahere vi denne Ligning fra (58) erhoides:

$$U^4 - U_1^4 = \frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2 (U - U_1),$$

hvilken Ligning naturligviis er tilfredsstillet ved $U = U_1$. Men bortdividere vi Factoren $(U - U_1)$, saa erholde vi følgende Ligning af 3die Grad:

$$U^3 + U_1 U^2 + U_1^2 U + U_1^3 = \frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2 \dots \dots \dots (61)$$

hvis Rødder ere de tre andre Værdier af U , der tilfredsstillte Ligningen (58) for samme Værdi af λ .

Forudsætte vi først, at $U_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$, saa finde vi, at Ligningen (61) tillige tilfredsstilltes ved $U = 0$, medens de to andre Rødder ere imaginære. Forudsætte vi dernæst, at $U_1 > \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$, altsaa $U_1^3 - \frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2$ positiv, saa har Ligningen een negativ og to imaginære Rødder, og deraf følger, da U ikke kan være negativ, at naar $U_1 > \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$,

saa gives der kun een Vandspeilsform. Er derimod $U_1 < \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$, saa har Ligningen (61) stedse to imaginære Rødder, og een positiv Rod, der altsaa angiver Vanddybden for den anden Vandspeilsform, svarende til samme Vandføring og samme Tversnit af Ledningen, som Ledningen U_1 , og denne anden Vanddybde U kan fremstilles, som en Function af U_1 , ved følgende Formel:

$$U = \left[k + \sqrt{k^2 + 8 \left(\frac{U_1}{3} \right)^6} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[k - \sqrt{k^2 + 8 \left(\frac{U_1}{3} \right)^6} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{U_1}{3} \dots \dots (62)$$

idet $k = \frac{2}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2 - 10 \left(\frac{U_1}{3} \right)^3$.

Herved skal jeg kun bemærke, at $U_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$ gjør $U = U_1$, samt at med U_1 voxende fra $\sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$ til $\sqrt[3]{\frac{1}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$ aftager U fra $\sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$ til Nul, og endelig, at for $U_1 > \sqrt[3]{\frac{4}{g} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2}$ er U negativ, hvilket saaledes yderligere tjener til at belyse det ovenfor Anførte.

Efter saaledes at have undersøgt alle de forskjellige Classer af Vandspeilsformer, som kunne fremtræde i en rectangular Vandledning, der har en saa stor Brede, at vi kunne abstrahere fra Sidevæggenes Indflydelse paa Vandstrømmen, vil det maaskee være hensigtsmæssigt i Korthed at give ligesom en Oversigt over disse forskjellige Forhold, fra en anden Side betragtet.

Vi bemærke da først, at ifølge Formlerne (26) og (27), sammenholdt med Formlerne (39) og (49) samt Formlen (37), haves:

$$\varphi_p = \frac{1}{u_p^3}, \quad \psi_m = \frac{1}{u_m^3}, \quad \varphi = \frac{1}{u^3} \text{ og } \psi = \frac{1}{u^3} \dots \dots \dots (63)$$

og indsættes disse Værdier i Formlen (31), saa kan denne Formel skrives under Formen

$$\frac{dU}{d\lambda} = \text{tg } \omega \cdot \frac{U^3 - U_p^3}{U^3 - U_m^3}, \dots \dots \dots (64)$$

idet vi ifølge (26) og (27) finde, at

$$\text{tg } \omega = g\alpha \cdot \frac{U_m^3}{U_p^3} \dots \dots \dots (65)$$

Indsættes de samme Værdier i Formlerne (32) og (34), saa erholdes fremdeles:

$$\frac{d^2 U}{d\lambda^2} = 3 \cdot \text{tg } \omega \cdot (U_p^3 - U_m^3) \cdot \frac{U^2 \cdot \frac{dU}{d\lambda}}{(U^3 - U_m^3)^2}; \dots \dots \dots (66)$$

og indsætte vi endelig Værdierne (63) i Formlen (35), saa finde vi Krumningsradius udtrykt ved

$$r = \pm \frac{[(U^3 - U_m^3)^2 + \text{tg}^2 \omega (U^3 - U_p^3)^2]^{\frac{3}{2}}}{3 \text{tg}^2 \omega (U_p^3 - U_m^3) \cdot U^2 (U^3 - U_p^3)} \dots \dots \dots (67)$$

Af disse fire sidste Formler kunne vi let udlede alle de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne fremstaae i den betragtede Ledning.

I Almindelighed kunne vi herved bemærke følgende:

1) Da Tangens af den Heldningsvinkel, som Vandspeilet i et vilkaarligt Punkt, hvis Coordinater ere U og λ , danner ved Ledningens Bund, er udtrykt ved $\frac{dU}{d\lambda}$, saa er det klart, at Vandspeilet er i Stigning i Ledningens positive Retning, naar $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv, og i Stigning i Ledningens negative Retning, naar $\frac{dU}{d\lambda}$ er negativ.

2) Naar vi antage, at Ledningen har Fald i dens positive Retning, altsaa naar ω er positiv, saa er Tælleren $(U^3 - U_p^3)$ i Formlen (64) negativ fra $U=0$ til $U=U_p$ og positiv fra $U=U_p$ til $U=\infty$. Nævneren $(U^3 - U_m^3)$ derimod negativ fra $U=0$ til $U=U_m$, men positiv fra $U=U_m$ til $U=\infty$.

For $U=0$ er $\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha$; for $U=U_p$ er $\frac{dU}{d\lambda} = 0$; for $U=U_m$ er $\frac{dU}{d\lambda} = \infty$ og endelig for $U=\infty$ er $\frac{dU}{d\lambda} = \text{tg } \omega$.

Ved at betragte Formlen (66) see vi fremdeles, at der ikke gives noget Inflexionspunkt ved de her omhandlede Vandspeilsformer, og med Hensyn paa Krumningsradius

bemærkes, at denne ingensinde kan blive Nul, men derimod bliver uendelig stor for $U=0$, $U=U_p$ og $U=\infty$, samt for $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$.

$$\text{For } U=U_m \text{ bliver } \gamma = \gamma_m = \pm \frac{\operatorname{tg} \omega - g\alpha}{3} \cdot U_m.$$

Naar vi da ville bestemme de forskellige Vandspeilsformer, som kunne fremtræde, under Forudsætning af, at Ledningen har Fald i Retning af Strømmens Bevægelse, saa maae vi skjelne imellem de Tilfælde, hvor $\operatorname{tg} \omega < g\alpha$ og de Tilfælde, hvor $\operatorname{tg} \omega > g\alpha$.

Først ville vi betragte de Vandspeilsformer, som kunne fremtræde, naar Ledningens Fald er meget lille og navnlig mindre end $g\alpha$. Vi sætte altsaa:

I. $\operatorname{tg} \omega < g\alpha$ eller ifølge (65)

$$U_m < U_p$$

og det viser sig da let:

1) at fra $U=0$ til $U=U_m$ ere baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ positive, Ledningens Vandspeil følgelig i Stigning i den positive Retning, og navnlig saaledes, at fra Fyldningsgraden $U=0$ til $U=U_m$ voxer Tangens af den Heldningsvinkel, som Vandspeilet danner med Ledningens Bund, fra $g\alpha$ til $+\infty$ og i hele dette Interval er Vandspeilet convext imod Ledningens Bund. Betragt vi Vandspeilets Krumningsradius, saa viser det sig, at medens Vanddybden stiger fra $U=0$ til $U=U_m$ over Ledningens Bund, saa aftager γ fra $\div \infty$ til $\gamma_1 = \div \frac{g\alpha - \operatorname{tg} \omega}{3} \cdot U_m$, og heraf fremgaaer, at den omhandlede Vandspeilsform er identisk med den, som er fremstillet ved Fig. 3 paa Tabel I. Derefter viser det sig

2) at fra $U=U_m$ til $U=U_p$ ere baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ negative; Ledningens Vandspeil sænker sig altsaa i den positive Retning fra Vanddybden $U=U_p$ til $U=U_m$, medens $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ voxer negativt fra 0 til $\div \infty$ og Vandspeilet sænker sig, concavt imod Ledningens Bund. Samtidigt hermed er Krumningsradius positivt aftagende fra $+\infty$ til $\gamma_1 = \frac{g\alpha - \operatorname{tg} \omega}{3} \cdot U_m$, hvoraf fremgaaer, at denne Vandspeilsform er fremstillet ved Fig. 2 paa Plan I. Endelig viser det sig

3) at for Vanddybder af Strømmen, der ligge imellem $U=U_p$ og $U=\infty$, ere $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ positive. Vandspeilet i Ledningen stiger altsaa, convext imod Ledningens Bund, fra U_p til ∞ over denne Bund, medens $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ voxer fra 0 til $\operatorname{tg} \omega$. Vandspeilet gaaer følgelig

over fra at være parallelt med Ledningens Bund til at blive horizontalt, og Krumningsradius, som bestandig er negativ, findes at være uendelig stor ved begge Grændser, hvorimod den er endelig imellem disse. Krumningsradius, som altsaa er ∞ for $U = U_p$, maa følgelig aftage til et vist Minimum og derfra igjen voxe til ∞ for $U = \infty$. Det er heraf aabenbart, at den omhandlede Vandspeilsform er identisk med den, som i det Foregaaende er fremstillet ved Fig. 6 paa Tabel II.

Den Vanddybde U , hvorved γ er et Minimum, bestemmes, naar Ledningens Fald er saa lille, at $\cos \omega$ er meget nær $= 1$, idet vi sætte

$$U = n \cdot U_p, \text{ og } n_m = \frac{U_m}{U_p},$$

ved Hjælp af følgende Ligning af 9de Grad

$$n^9 - \frac{7 - n_m^3}{4} \cdot n^6 + \frac{5}{4} (1 - n_m^3) n_m^3 \cdot n^3 + \frac{n_m^6}{2} = 0 \quad \dots \dots \dots (68)$$

der lader sig opløse som en Ligning af 3die Grad.

Ville vi saaledes bestemme den Vanddybde U , som svarer til Minimum af Krumningsradius i det tidligere behandlede specielle Tilfælde, hvor $\text{tg } \omega = 0,001$, $U_p = 1,316$ Fod og $U_m = 0,934$ Fod, da finde vi først $n_m = 0,71$, og derefter ifølge (68)

$$n^9 - 1,66 \cdot n^6 + 0,287 \cdot n^3 + 0,064 = 0, \text{ hvoraf } n = 1,125.$$

Den søgte Vanddybde bliver altsaa $U = 1,125 \cdot 1,316 = 1,48$ Fod.

Under den her omhandlede Classe af Vandspeilsformer, der kunne fremtræde, naar Ledningens Fald eller $\text{tg } \omega$ er mindre end $g\alpha$, ville vi specielt mærke os det Tilfælde, hvor Ledningens Fald er Nul: hvor $\text{tg } \omega = 0$, og Ledningen altsaa er horizontal. I dette Tilfælde haves, ifølge Formlen (39), $U_p = \infty$; Vandspeilet kan altsaa ikke være parallelt med Ledningens Bund, uden for en uendelig stor Vanddybde. Men vi see dernæst, at Formlerne (64), (66) og (67) for $\text{tg } \omega = 0$ reducere sig til følgende:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} &= \frac{\alpha \left(\frac{q}{\delta}\right)^2}{U^3 - U_m^3} \\ \frac{d^2U}{d\lambda^2} &= + \frac{3\alpha \left(\frac{q}{\delta}\right)^2 \cdot U^2 \cdot \frac{dU}{d\lambda}}{(U^3 - U_m^3)^2} \\ \gamma &= \pm \frac{\left[(U^3 - U_m^3)^2 + \alpha^2 \left(\frac{q}{\delta}\right)^4 \right]^{\frac{3}{2}}}{3\alpha^2 \left(\frac{q}{\delta}\right)^4 U^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (69)$$

Vi maae her skjelne mellem Strømme, hvis Vanddybder falde imellem $U = 0$ og $U = U_m$ og dem, hvis Vanddybder falde imellem $U = U_m$ og $U = \infty$.

Antages først, at Vanddybden ligger mellem $U=0$ og $U=U_m$, saa ville baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ være positive, og Vandspeilet er altsaa convext imod Ledningens Bund samt i Stigning fra $U=0$ til $U=U_m$ over Ledningens Bund. Samtidigt bermed voxer $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ fra $g\alpha$ til $+\infty$ og Vandspeilets Krumningsradius γ , som bestandig er negativ, aftager samtidigt fra $\div\infty$ til $\div\frac{g\alpha}{3}\cdot U_m$, hvoraf følger, at denne Vandspeilsform falder sammen med den, som er fremstillet ved Fig. 10 i det Foregaaende. Antage vi dernæst, at Strømmens Vanddybde ligger imellem $U=U_m$ og $U=\infty$, saa er det klart, at baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ ere bestandig negative, og Vandspeilet altsaa er concavt imod Ledningens Bund, sænkende sig fra Vanddybden $U=\infty$ til $U=U_m$, men samtidigt voxer $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ fra 0 til $-\infty$, og Krumningsradius, som stadig er positiv, aftager fra $+\infty$ til $\frac{g\alpha}{3}U_m$. Det er altsaa aabenbart, at den omhandlede Vandspeilsform aldeles falder sammen med den, som er fremstillet ved Fig. 9.

Herfra ville vi nu gaae over til at betragte den Classe af Vandspeilsformer, som fremkomme, naar Ledningens Fald er større end $g\alpha$.

Vi ville altsaa antage

II. at $\text{tg } \omega > g\alpha$ og efter Formlen (65), at $U_m > U_p$.

Det viser sig da strax ved en Betragtning af Formlerne (64) og (66)

1) at for Vanddybder U , der ligge mellem 0 og U_p , er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ positiv og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ negativ, og deraf fremgaaer, at Vandstrømmen er i Stigning imod Ledningens Udløb fra Vanddybden 0 til Vanddybden U_p , samt at Vandspeilet er concavt imod Bunden i hele dette Interval. Under denne Stigning fra $U=0$ til $U=U_p$ aftager $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ fra $g\alpha$ til 0, hvorimod Krumningsradius, som bestandig er positiv, og som er uendelig stor ved begge Grændser, men endelig imellem samme, har et vist Minimumspunkt, der nærmere kan bestemmes ved Hjælp af Formlen (68). Det vil saaledes være indlysende, at den omhandlede Vandspeilsform nøiagtig er den samme, som den vi i det Foregaaende have angivet ved Fig. 1.

2) Naar Vanddybden U ligger mellem U_p og U_m , saa er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ negativ og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ positiv. Strømmens Vandspeil er altsaa convex imod Ledningens Bund, sænkende

sig fra U_m til U_p , imedens $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er aftagende fra $\div \infty$ til 0. Krumningsradius, som bestandig er negativ, voxer derimod fra $\div \frac{\text{tg } \omega - g\alpha}{3} \cdot U_m$ til $\div \infty$, naar Vanddybden aftager fra U_m til U_p , og deraf fremgaaer, at den omhandlede Vandspeilsform ikke er forskjellig fra den, som vi tidligere have angivet ved Fig. 4 paa Plan I. Endelig

3) Naar Vanddybden af Strømmen ligger mellem $U = U_m$ og $U = \infty$, saa er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ positiv og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ negativ; Vandspeilet er følgelig concavt imod Ledningens Bund, stigende over samme fra U_m til ∞ . Samtidigt aftager $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ fra ∞ til $\text{tg } \omega$, hvorimod Krumningsradius, som bestandig er positiv, voxer fra $\frac{\text{tg } \omega - g\alpha}{3} \cdot U_m$ til $+\infty$, og heraf fremgaaer uden Vanskelighed, at den omhandlede Vandspeilsform er identisk med den Form, som vi i det Foregaaende have fremstillet ved Fig. 5, Plan II.

III. Der staaer nu kun tilbage paa samme Maade at bestemme de forskjellige Vandspeilsformer som kunne fremtræde, naar den betragtede Vandledning har en Stigning i den Retning, hvori Strømmen bevæger sig. I dette Tilfælde er altsaa Heldningsvinklen ω negativ, og vi ville da ligesom tidligere betegne den ved $(-\omega)$, hvorved ω altsaa fremdeles betegner en Vinkel i 1ste Qvadrant. Men naar vi i Formlerne (64), (65), (66) og (67) indsætte $\div \omega$ istedetfor ω , saa erholde vi følgende fire Formler:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} &= -\text{tg } \omega \frac{U^3 + U_p^3}{U^3 \div U_m^3}, \\ \text{tg } \omega &= g\alpha \frac{U_m^3}{U_p^3}, \\ \frac{d^2U}{d\lambda^2} &= 3 \text{tg } \omega (U_p^3 + U_m^3) \frac{U^2 \frac{dU}{d\lambda}}{(U^3 - U_m^3)^2}, \\ r &= \pm \frac{[(U^3 - U_m^3)^2 + \text{tg }^2 \omega (U^3 + U_p^3)^2]^{\frac{3}{2}}}{3 \text{tg }^2 \omega (U_p^3 + U_m^3) U^2 (U^3 + U_p^3)}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

hvorved vi maa skjælnes imellem de Tilfælde, hvor Strømmens Dybde U er mindre end U_m , og de Tilfælde, hvor Strømmens Dybde U er større end U_m .

Ligger Vanddybden imellem $U = 0$ og $U = U_m$, saa er baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ positive, Vandstrømmen altsaa i Stigning i Retning af Strømmens Bevægelse fra Vanddybden $U = 0$ til $U = U_m$, og Vandspeilet convext imod Ledningens Bund. Samtidigt hermed er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ voxende fra $g\alpha$ til $+\infty$, hvorimod Krumningsradius, der bestandig er

negativ, er aftagende fra $\div \infty$ til $\div \frac{\text{tg } \omega + g \alpha}{3} \cdot U_m$, og det viser sig saaledes let, at den her omhandlede Vandspeilsform nøiagtig falder sammen med den i det Foregaaende paa Plan III angivne Form Fig. 8.

Endelig naar vi betragte de Tilfælde, hvor Vandstrømmens Dybde ligger mellem $U = U_m$ og $U = \infty$, da viser det sig let, at baade $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ og $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ ere negative i hele dette Interval; Vandstrømmen sænker sig altsaa i den positive Retning fra en uendelig stor Vanddybde indtil en Dybde $= U_m$ ved Udløbet, idet Vandspeilet bestandig er concavt imod Ledningens Bund. Men med Vanddybden aftager ogsaa Krumningsradius, som er positiv fra ∞ til $\frac{\text{tg } \omega + g \alpha}{3} \cdot U_m$, hvorimod $\frac{dU}{d\lambda}$ er voxende fra $\div \text{tg } \omega$ til $\div \infty$ og det viser sig saaledes let, at den søgte Vandspeilsform er identisk med den Form, som er fremstillet ved Fig. 7 paa Plan II.

Vi have nu gennemgaaet alle de Vandspeilsformer, som kunne danne sig i en rektangulær Vandledning, naar der igjennem hele Ledningen flyder en constant Vandmængde, og vi have navnlig seet, at det hele Antal af forskellige Former, der kunne fremtræde, naar Ledningen har Fald i den Retning, hvori Strømmen bevæger sig, er 6. Har Ledningen derimod Fald i den modsatte Retning af den, hvori Strømmen flyder, eller er Ledningen horizontal, saa gives der kun to Vandspeilsformer, hvorunder Strømmen kan bevæge sig, og disse to Former vise sig tilmed at være identiske med to af de førstnævnte 6 Former. Det hele Antal af Vandspeilsformer, som kan fremtræde, er altsaa i Virkeligheden kun 6.

Adskilligt kunde der endnu være at tilføie; men jeg skal dog indskrænke mig til at henlede Opmærksomheden paa det interessante Forhold, som jeg foran har omtalt i Almindelighed, og som nærmere er blevet belyst ved den nys foretagne Undersøgelse over de rektangulære Vandledninger. Jeg sigter herved til den Relation imellem Ledningens Vandføring $\left(\frac{Q}{\delta}\right)$ og Strømmens Dybde i Ind- eller Udløbet, som er bestemt ved Formlen (49), og som var den, der oprindelig gav mig Lyst til at underkaste de frie Vandspeilsformer, der kunne danne sig i forskellige Vandledninger, en videnskabelig Behandling. Ved de rektangulære Vandledninger, som vi nys have undersøgt, er det viist, at i alle de Tilfælde, hvor Ledningens Fald er saa lille, at $\text{tg } \omega < g \alpha$, ligesom ogsaa i de Tilfælde, hvor Ledningen har en Stigning istedetfor et Fald, vil Ligningen (49) fremstille den Relation, som finder Sted i Ledningens Udløb, hvorimod denne Relation svarer til Ledningens Indløb, naar $\text{tg } \omega > g \alpha$. Nu finde vi imidlertid i de fleste forekommende Tilfælde, at ω er saa lille, at vi uden mærkelig Feil kunne sætte $\cos \omega = 1$, og i saadant Tilfælde kan Formlen (49) altsaa skrives:

$$q = \delta \cdot \sqrt{g \cdot U_m^3} \dots \dots \dots (71)$$

som navnlig er mærkværdig derved, at denne Formel fremstiller Strømmens Vandføring alene som Function af Strømmens Dybde i Ledningens Munding, uafhængig baade af Ledningens Fald og af Ledningens Modstandscoefficient α . Denne Formel afgiver derfor et beqvemt Middel til at bestemme Ledningens Vandføring, idet man blot behøver at maale Strømmens Vanddybde U_m i Udløbet, naar $\text{tg } \omega < g\alpha$, og i Indløbet naar $\text{tg } \omega > g\alpha$.

Betegne vi den Hastighed, hvormed Vandet strømmer ind eller ud af Ledningen, ved V , da er

$$V \cdot U_m \cdot \delta = q,$$

og indsætte vi denne Værdi for q i Formlen (71), saa finde vi

$$V^2 = g \cdot U_m, \dots \dots \dots (72)$$

hvoraf sees, at Ind- eller Udstømningshastigheden er ligestor med den Hastighed, som Vandet vilde opnaae ved et frit Fald igjennem en Høide, halv saa stor som Vanddybden U_m .

Ved fremdeles at betragte Formlen (71) føres Tanken hen paa den velbekjendte Formel for Afløbsmængden over et Overfald. Den almindelige Formel for Afløbsmængden er jo nemlig:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \delta \sqrt{2g H^3},$$

hvor Q betegner Vandføringen pr. Sec. for et Overfald, hvis Brede = δ , idet Vandspeilet i Beholderen, hvis Vand flyder over Overfaldet, ligger i Høiden H over Overfaldet, og μ betegner en Erfarings-Coefficient, som dels hidrører fra, at Vandstraalens Høide i Udløbet er mindre end H , og dels har sin Grund i Straalens Contraction. Vil man anvende Formlen (71) paa Overfald, f. Ex. fra en Canal, hvori Vandet strømmer henimod Overfaldet, saa er det klart, at, da Vandet i Canalen bevæger sig frem imod Overfaldsdæmningen igjennem hele Strømsprofilen, saa maa det i Nærheden af Overfaldet fra alle Punkter af Strømmen bevæge sig henimod Overfaldsaabningen og derved, naar den sidste Deel af Canalen ikke er forsynet med Ledevægge, som forhindre Straalens Contraction, foranledige, at Strømmen i Udløbet fra Beholderen eller Canalen vil lide en Sammentrængen, hvorved Straalen faaer et mindre Tversnitsareal end Udstømningsaabningen har. I saadant Tilfælde vilde man begaae en Feil, hvis man gik ud fra, at Straalen havde et Tversnitsareal ligestort med Udstømningsaabningen. Det vil derfor være fornødent at berigtige Udstømningsmængden paa Grund af den stedfindende Contraction, som man i Almindelighed anslaaer til 0,8 saavel for Bredden som for Tykkelsen af Straalen, og altsaa til $0,8 \times 0,8$, naar der finder Contraction Sted baade i Bredden og i Høiden. Med andre Ord, vil man anvende Formlen (71) paa Overfald, saa maa man skrive denne under Formen

$$q = c \cdot \delta \sqrt{g \cdot U_m^3} \dots \dots \dots (73)$$

hvor c har en Værdi beliggende mellem 1 og 0,64, alt eftersom Contractionen er ganske ophævet eller meer eller mindre fuldstændig ophævet.

Det er klart, at de i det Foregaaende fremstillede Formler for Vandets Bevægelse i rectangulære Ledninger kunne finde Anvendelse paa en Mængde forskellige Tilfælde af større eller mindre praktisk Vigtighed, og jeg skal deriblandt blot nævne det bekjendte Problem om Strømmens Opstuvning, som gaaer ud paa Løsningen af følgende Opgave:

Naar man tværs over en Strøm anbringer en Overfaltdæmning af en given Høide og derved paa et bestemt Sted opstemmer Vandet i Canalen eller Floden, til hvilken Høide opstemmes da Vandet ovenfor Overfaltdæmningen i Forhold til Afstanden fra denne Dæmning?

Vi tænke os, at Canalen er rectangulær, og at dens Bund er fremstillet ved den i Fig. 11 angivne rette Linie $ABDG$, som danner en Vinkel ω med Horizontalen AL , samt at MI er Strømmens oprindelige Vandspeil, der forudsættes at være parallelt med Ledningens Bund. Fremdeles tænke vi os, at man paa et bestemt Sted BD af Ledningens Bund bygger en Overfaltdæmning BCD , hvis Forside $BC = l$ danner en negativ Vinkel ($\div \omega_1$) med Horizontalen BL_1 , samt at Strømmens Vandspeil, efter Opførelsen af denne Dæmning, indtager den Stilling $FEHI$, hvis Form og Beliggenhed søges. Naar vi da fremdeles forudsætte, at Vandføringen pr. Fods Brede af Strømmen før og efter Opstuvningen er $\left(\frac{q}{\delta}\right)$ Cbfod pr. Sec., saa er det indlysende, at, medens Strømmens oprindelige Vanddybde $AM = GI$ er bestemt ved Formlen (39), saa vil den nye Vandspeilsform FEH , naar $\text{tg } \omega < g\alpha$, være sammensat af tvende af de i det Foregaaende fremstillede Vandspeilsformer, den ene svarende til en Strøm $BCH E$, der bevæger sig fra BE til HC i en Ledning, hvis Stigning $= \text{tg } \omega_1$, og hvoraf Strømmen har frit Afløb ved C , og den anden svarende til en Strøm, som bevæger sig i den givne Ledning AB , og ved Punktet N er opstemmet til en Høide NE , som vi let kunne bestemme. Den søgte Vandspeilsform FEH er altsaa sammensat af de to Vandspeilsformer, som respective ere fremstillede ved Figurerne 7 og 6 i det Foregaaende.

Til Exempel ville vi antage, at Canalens Vandføring $\left(\frac{q}{\delta}\right) = 20$ Cbfod, og at dens Fald $= \text{tg } \omega = 0,0005$, at $BC = l = 12$ Fod, og at Høiden af Overfaltdæmningen $l \sin \omega_1 = 3$ Fod, altsaa $\sin \omega_1 = 0,25$, $\cos \omega_1 = 0,97$ og $\omega_1 = 14^\circ 28'$.

Modstandscoefficienten α ville vi antage at være den, som svarer til en naturlig jevn Flodseng, og foreløbig sætte $\alpha = 0,00011$ samt $g\alpha = 0,0035$. For da at bestemme den hele søgte Vandspeilsform FEH , maae vi først bestemme Vandhøiden $CH = U_{m_1}$, ifølge Formlen (49), som giver:

$$U_{m_1} = \sqrt[3]{\frac{1}{g \cos \omega_1} \left(\frac{q}{\delta}\right)^2} = 2,36 \text{ Fod.}^L$$

Dernæst bestemmes Vanddybden $EB = U_1$ ifølge Formlen (56) ved Hjælp af Ligningen:

$$l = \div \frac{U_{p1}}{g\alpha} \left[\frac{g\alpha}{\lg \omega_1} (n_1 - n_{m1}) - \left(\frac{g\alpha}{\lg \omega_1} + 1 \right) (\Delta n_1 - \Delta n_{m1}) \right]$$

hvor $l = \div 12$ Fod, $U_{p1} = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\sin \omega_1} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2} = 0,56$ Fod, $n_{m1} = \frac{U_{m1}}{U_{p1}} = 4,21$,

altsaa, ifølge Tabel 3, $\Delta n_{m1} = 0,882$, og endelig $\frac{g\alpha}{\lg \omega_1} = 0,014$, som indsat i ovenstaaende

Ligning giver:

$$5,36 = n_1 - 4,21 - 72,4 (\Delta n_1 - 0,882),$$

hvoraf det let viser sig ved at betragte Tabel 3, at $n_1 = 11,1$, og ved Hjælp af denne Værdi finde vi, ifølge Formlen (41), at den søgte Dybde $EB = n_1 \cdot U_{p1} = 6,22$ Fod.

Herefter finde vi den Dybde, hvortil den givne Strøm er opstemmet ved Foden af Dæmningen, at være $NE = U_0 = U_1 \cos \omega_1 = 6,03$ Fod, og naar vi nu søge den oprindelige Parallelstrøms Vanddybde $AM = IG = U_p$, saa finde vi ifølge Formlen (39)

$U_p = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\sin \omega} \left(\frac{q}{\delta} \right)^2} = 4,45$ Fod, hvoraf fremgaaer, at ved Foden af Overfaldsdæmningen er Strømmen blevet opstemmet $6,03 - 4,45 = 1,58$ Fod.

Fra Punktet E i negativ Retning imod F nærmer Vandspeilet sig imod Canalens Bund indtil det i en vis Afstand fra E kan betragtes som parallelt med Bunden og for alle større Afstande vedbliver at flyde parallelt med Bunden af Ledningen, idet Strømmen uforandret har sin oprindelige Dybde $U_p = 4,45$ Fod, og Strømhastigheden sin oprindelige Størrelse $= 4,5$ Fod pr. Sec. Afstanden ($\div \lambda$) fra Punktet E indtil et vilkaarligt Punkt F , hvor Vanddybden er U , n beregnes ifølge Formlen (43), ved deri at indsætte $\lambda_0 = 0$, $U_p = 4,45$ Fod, $g\alpha = 0,0035$, $\frac{g\alpha}{\lg \omega} = \frac{0,0035}{0,0005} = 7$, $n_0 = \frac{U_0}{U_p} = 1,36$, altsaa ifølge Tabel 2, $\Delta n_0 = \div 1,24$, hvorved erholdes:

$$(\div \lambda) = 8500 \left[(1,36 - n) \div \frac{6}{7} (\Delta n + 1,24) \right]$$

Indsætte vi heri successive følgende sammensvarende Værdier for n og Δn , nemlig:

$$\begin{array}{ll} n = 1,3, & \Delta n = -1,28 \\ n = 1,2, & \Delta n = -1,40 \\ n = 1,1, & \Delta n = -1,59 \\ n = 1,06, & \Delta n = -1,70 \\ n = 1,01, & \Delta n = -2,36 \end{array}$$

saa finde vi følgende sammensvarende Værdier af Afstanden fra Punktet E , Vanddybden og Opstuvningen:

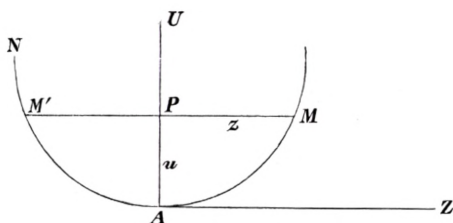
| Afstanden (÷ λ) | Vanddybden $U = n \cdot U_p$ | Opstuvningen $U - U_p$ |
|--------------------|---------------------------------|---------------------------|
| 0 Fod | 6,03 Fod | 1,58 Fod |
| 800 — | 5,78 — | 1,55 — |
| 2,525 — | 5,54 — | 0,89 — |
| 4,760 — | 4,90 — | 0,45 — |
| 5,900 — | 4,72 — | 0,27 — |
| 11,155 — | 4,49 — | 0,04 — |

Erindres derhos, at $HC = 2,36$, saa er det klart, at Vandspeilet i Punktet H ligger i en Høide af $2,36 \cdot \cos \omega_1 = 2,29$ Fod over Toppen af Overfaldsdæmningen og 5,29 Fod over Bunden af Ledningen, saa at Vandstrømmen i Punktet H kun er opstemmet 0,84 Fod.

Problemet om Strømmens Opstuvning ved den betragtede Dæmning er saaledes løst.

Cylindriske Vandledninger.

Med Hensyn til de cylindriske Vandledninger ville vi først i Almindelighed bemærke, at, naar vi tænke os Tværsnittet af den reducerede Ledning fremstillet ved hosstaaende



Figur, hvor MAN betegner Ledningens Contour, der antages bestemt ved en given Ligning imellem de retvinklede Coordinater $AP = u$ og $PM = z$, svarende til et vilkaarligt Punkt M , og vi derhos antage, at Ledningen er symmetrisk med Hensyn paa Verticallinien AU igjennem det nederste Punkt A i Contouren, samt at den er fyldt med Vand indtil Punktet

P , saa kan Vandstrømmens Tversnitsareal MAM' fremstilles ved:

$$\left. \begin{aligned}
 s &= f(u) = 2 \int_0^u z \, du, \\
 \text{Vandspeilets Brede } MM' \text{ ved } f'(u) &= 2z \\
 \text{og Længden af den beskyllde Contour } MAM' \text{ ved} \\
 c &= F(u) = 2 \int_0^u \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \cdot du
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (74)$$

hvoraf følger, at Formlerne (23) kunne fremstilles ved:

$$\varphi = \frac{\int_0^u \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \cdot du}{4 \left(\int_0^u z \, du\right)^3}, \quad \psi = \frac{z}{4 \left(\int_0^u z \, du\right)^3} \dots \dots \dots (75)$$

A. Vandledning med et parabolisk Tværsnit.

Antage vi, at Ledningens Tværsnitsform er en Parabel, hvis Toppunkt er A og hvis Ligning er

$$Z^2 = \delta \cdot U \dots\dots\dots (76)$$

samt antage vi, at den reducerede Ledning har en Parameter = 1, saa kan dens Ligning fremstilles ved

$$z^2 = u \dots\dots\dots (77)$$

hvorefter Formlerne (74) blive følgende:

$$\left. \begin{aligned} f(u) &= \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}}, \\ f'(u) &= 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} \text{ og} \\ F(u) &= \sqrt{u + 4u^2} + \frac{1}{2} \text{Log} (2\sqrt{u} + \sqrt{1 + 4u}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (78)$$

Heraf finde vi, ifølge (75),

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{27}{32} \cdot \frac{N^4}{u^4}, \quad \psi = \frac{27}{32} \cdot \frac{1}{u}, \\ \text{idet } N^4 &= \frac{\sqrt{1 + 4u}}{2} + \frac{\text{Log} (2\sqrt{u} + \sqrt{1 + 4u})}{4\sqrt{u}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79)$$

Til Lettelse ved Beregninger har jeg for en Række af Værdier af u bestemt de i efterfølgende Tabel 4 indeholdte Værdier af Functionerne N^4 , N og $\left(\frac{u}{N}\right)$, hvilke Størrelser alle ere rene Tal.

Tabel 4.

| u | N^4 | N | $\left(\frac{u}{N}\right)$ | u | N^4 | N | $\left(\frac{u}{N}\right)$ |
|------|-------|------|----------------------------|----------|----------|----------|----------------------------|
| 0,00 | 1,00 | 1,00 | 0,00 | 11,0 | 3,57 | 1,58 | 8,00 |
| 0,10 | 1,07 | 1,02 | 0,10 | 12,0 | 3,70 | 1,59 | 8,65 |
| 0,20 | 1,12 | 1,05 | 0,20 | 13,0 | 3,84 | 1,40 | 9,29 |
| 0,50 | 1,18 | 1,04 | 0,29 | 14,0 | 3,98 | 1,41 | 9,94 |
| 0,40 | 1,25 | 1,05 | 0,38 | 15,0 | 4,09 | 1,42 | 10,54 |
| 0,50 | 1,28 | 1,06 | 0,47 | 16,0 | 4,20 | 1,43 | 11,17 |
| 0,60 | 1,32 | 1,07 | 0,56 | 17,0 | 4,33 | 1,44 | 11,77 |
| 0,70 | 1,36 | 1,08 | 0,65 | 18,0 | 4,46 | 1,45 | 12,37 |
| 0,80 | 1,40 | 1,09 | 0,74 | 19,0 | 4,57 | 1,46 | 12,97 |
| 0,90 | 1,44 | 1,10 | 0,82 | 20,0 | 4,68 | 1,47 | 13,57 |
| 1,00 | 1,48 | 1,10 | 0,91 | 21,0 | 4,79 | 1,48 | 14,17 |
| 2,00 | 1,81 | 1,16 | 1,72 | 22,0 | 4,90 | 1,49 | 14,77 |
| 3,0 | 2,09 | 1,20 | 2,50 | 23,0 | 5,00 | 1,50 | 15,37 |
| 4,0 | 2,32 | 1,25 | 3,24 | 24,0 | 5,09 | 1,50 | 15,97 |
| 5,0 | 2,56 | 1,26 | 4,00 | 25,0 | 5,18 | 1,51 | 16,57 |
| 6,0 | 2,75 | 1,28 | 4,70 | | | | |
| 7,0 | 2,93 | 1,30 | 5,40 | 100 | 10,10 | 1,78 | 56,25 |
| 8,0 | 3,10 | 1,32 | 6,05 | 900 | 50,04 | 2,34 | 384,4 |
| 9,0 | 3,25 | 1,34 | 6,70 | 100,00 | 100,00 | 3,16 | 3163,0 |
| 10,0 | 3,41 | 1,36 | 7,35 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

Indsættes Værdierne for φ og ψ ifølge (79) i Formlen (24) erhoides

$$g \alpha d \lambda = \delta \frac{g \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \cdot \frac{u^4 - u_m^4}{u^4 - u_p^4} du \dots \dots \dots (80)$$

idet vi for Kortheds Skyld sætte Parallelstrømmens Vanddybde $= u_p$, Vanddybden i Ledningens Munding, svarende til Maximum eller Minimum af λ , $= u_m$, samt

$$u_p = \sqrt[4]{\frac{27}{32} \frac{\alpha}{\sin \omega} \frac{q^2}{\delta^5}} \cdot N \text{ og } u_m = \sqrt[4]{\frac{27}{32} \frac{1}{g \cos \omega} \cdot \frac{q^2}{\delta^5}} \dots \dots \dots (81)$$

Integreres Ligningen (80) imellem saa snevre Grændser, at N^4 kan betragtes som constant, saa kan Integrationen udføres under endelig Form, og Resultatet fremstilles saaledes:

$$\left. \begin{aligned} g \alpha \lambda &= C + \frac{g \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \cdot U + \left(\frac{g \alpha}{\operatorname{tg} \omega} - \frac{1}{N^4} \right) U_p \cdot \Delta u \\ \Delta u &= \frac{1}{4} \left[\operatorname{Log} \left(\frac{\frac{U}{U_p} - 1}{\frac{U}{U_p} + 1} \right) - 2 \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{U}{U_p} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (82)$$

hvor C er en arbitrair Constant og Log betegner den naturlige Logarithme.

Af Formlen (82) fremgaaer, ganske i Overensstemmelse med hvad der finder Sted ved de rectangulære Ledninger, at, naar Vandstrømmen i den paraboliske Ledning i noget Punkt har en Vanddybde

$$U < U_p,$$

saa ligger Vandspeilet heelt og holdent saaledes, at Vanddybden U i et hvilket som helst Punkt af Strømmen er lige stor eller mindre end U_p , og dernæst, naar Vandstrømmen i noget Punkt har en større Dybde end $U = U_p$, saa have alle Punkter af Vandspeilet en større Dybde end Parallelstrømmen.

Det vil her være beqvemt at sætte:

$$\frac{U}{U_p} = n, \text{ altsaa } \left(\frac{u}{N} \right) = n \cdot \sqrt[4]{\frac{27}{32} \cdot \frac{\alpha}{\sin \omega} \cdot \frac{q^2}{\delta^5}} \dots \dots \dots (83)$$

hvorved Δu forandres til Δn og Formlerne (82) til

$$\left. \begin{aligned} g \alpha \lambda &= C + U_p \left[\frac{g \alpha}{\operatorname{tg} \omega} \cdot n + \left(\frac{g \alpha}{\operatorname{tg} \omega} - \frac{1}{N^4} \right) \Delta n \right] \\ \Delta n &= \frac{1}{4} \left[\operatorname{Log} \left(\pm \frac{n - 1}{n + 1} \right) - 2 \operatorname{arc} (\operatorname{tg} = n) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (84)$$

idet (\pm) under Logarithmetegnet kun angiver, at $+$ vælges, naar $n > 1$, og \div , naar $n < 1$.

Antage vi, at til $\lambda = \lambda_0$ svarer $n = n_0$ og $N = N_0$, saa kan den første Formel (84) skrives:

$$\lambda \div \lambda_0 = \frac{U_p}{g \alpha} \left[\frac{g \alpha}{\text{tg } \omega} \cdot (n - n_0) + \left(\frac{g \alpha}{\text{tg } \omega} - \frac{1}{N_1^4} \right) (\Delta n - \Delta n_0) \right] \dots \dots \dots (85)$$

idet vi for N_1 tage Middeltallet af N og N_0 .

Til Lettelse ved forefaldende Beregninger har jeg for en Række af Værdier af n bestemt de tilsvarende Værdier af Δn , og Resultatet findes i efterfølgende Tabel.

Tabel 5.

| n | Δn | n | Δn | n | Δn | n | Δn |
|------|------------|------|------------|------|------------|----------|------------|
| 0,00 | -0,000 | 0,72 | -0,763 | 1,00 | $-\infty$ | 1,50 | -0,974 |
| 0,01 | -0,010 | 0,74 | -0,792 | 1,01 | -1,720 | 1,55 | -0,945 |
| 0,05 | -0,050 | 0,76 | -0,822 | 1,02 | -1,460 | 1,40 | -0,924 |
| 0,10 | -0,100 | 0,78 | -0,854 | 1,04 | -1,540 | 1,45 | -0,906 |
| 0,15 | -0,150 | 0,80 | -0,886 | 1,06 | -1,270 | 1,50 | -0,895 |
| 0,20 | -0,200 | 0,82 | -0,925 | 1,08 | -1,220 | 1,60 | -0,870 |
| 0,25 | -0,250 | 0,84 | -0,965 | 1,10 | -1,177 | 1,70 | -0,855 |
| 0,30 | -0,300 | 0,86 | -1,008 | 1,12 | -1,140 | 1,80 | -0,843 |
| 0,35 | -0,350 | 0,88 | -1,053 | 1,14 | -1,112 | 1,90 | -0,835 |
| 0,40 | -0,402 | 0,90 | -1,102 | 1,16 | -1,088 | 2,00 | -0,828 |
| 0,45 | -0,454 | 0,92 | -1,160 | 1,18 | -1,067 | 3,00 | -0,798 |
| 0,50 | -0,506 | 0,94 | -1,240 | 1,20 | -1,047 | 4,00 | -0,790 |
| 0,55 | -0,560 | 0,96 | -1,360 | 1,22 | -1,028 | 9,00 | -0,786 |
| 0,60 | -0,616 | 0,98 | -1,550 | 1,24 | -1,012 | 19,00 | -0,7855 |
| 0,65 | -0,675 | 0,99 | -1,712 | 1,26 | -0,998 | 49,00 | -0,7854 |
| 0,70 | -0,730 | 1,00 | $-\infty$ | 1,28 | -0,986 | ∞ | -0,7854 |

Af Overeensstemmelsen imellem de angivne Formler, svarende til den paraboliske Vandledning, og de Formler, som vi tidligere have fremstillet for den rektangulære Ledning, sees let, at Vandstrømmen bevæger sig under lignende Vandspeilsformer i begge Classer af Ledninger, hvorfor det vilde være overflødigt her at gaae videre i Detail med de paraboliske Ledningers Vandspeilsformer og jeg skal derfor indskrænke mig til at gjøre nogle Bemærkninger angaaende disse Vandledninger.

Opløse vi den første Ligning (81) med Hensyn paa Vandføringen q , da finde vi, naar Vandspeilet er paralleltløbende med Bunden af Ledningen, altsaa naar $u = u_p$ og $N = N_p$,

$$q = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sin \omega}{\alpha} \left(\frac{u_p}{N_p} \right)^4} \cdot d^5 \dots \dots \dots (86)$$

hvilken Ligning tjener til at beregne Vandføringen q , naar Ledningens Fald, Vanddybden

U_p af Parallelstrømmen samt Parametren δ ere givne; thi Størrelsen $\left(\frac{u_p}{N_p}\right)$ bestemmes let af Tabel 4, naar $u_p = \frac{U_p}{\delta}$ er bestemt.

Af den første Formel (78) i Forbindelse med den anden Formel (8) følger dernæst, at Vandstrømmen, hvis Dybde er U , har et Tværnsitsareal:

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{\delta \cdot U^3} \dots \dots \dots (87)$$

og ved Hjælp af Formlerne (86) og (87) finde vi dernæst, at Parallelstrømmens Hastighed v_p kan fremstilles ved:

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot \frac{U_p}{N_p^4}} \dots \dots \dots (88)$$

Opløse vi den anden Ligning (81) med Hensyn paa Vandføringen q , saa finde vi endvidere:

$$q = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cos \omega \cdot u_m^4 \cdot \delta^5}, \dots \dots \dots (89)$$

hvorved bemærkes, at ifølge Formlen (33) vil Vandhøiden u_m svare til Udløbet eller Indløbet, eftersom

$$T = (\varphi_p - \varphi) \frac{d\psi}{du} = -\frac{27}{8u^5} \left(\frac{\sin \omega \delta^5}{\alpha q^2} - \frac{27 N^4}{32 u^4} \right)$$

er positiv eller negativ. Men indsætte vi u_m og N_m for u og N og erindre, at ifølge (81) er $\frac{27}{32} \cdot \frac{N_m^4}{u_m^4} = g \cos \omega \cdot \frac{\delta^5}{q^2} \cdot N_m^4$, saa finde vi

$$T = -\frac{27 g \cos \omega}{8 u_m^5} \cdot \frac{\delta^5}{q^2} \left(\frac{\text{tg } \omega}{g \alpha} - N_m^4 \right),$$

og deraf følger altsaa, at u_m fremstiller Vandstrømmens Dybde

$$\text{i Udløbet, naar } N_m^4 > \frac{\text{tg } \omega}{g \alpha}$$

$$\text{i Indløbet, naar } N_m^4 < \frac{\text{tg } \omega}{g \alpha}.$$

Af Formlerne (87) og (89) følger fremdeles, at Vandets Udstrømnings- eller Indstrømningshastighed, alt eftersom U_m svarer til Udløbet eller Indløbet af Ledningen, kan fremstilles ved

$$v_m = \sqrt{\frac{2}{3} g \cdot U_m}, \dots \dots \dots (90)$$

hvoraf sees, at denne Hastighed er ligestor med den, som et Legeme erholder ved et frit Fald igjennem en Høide $= \frac{U_m}{3}$.

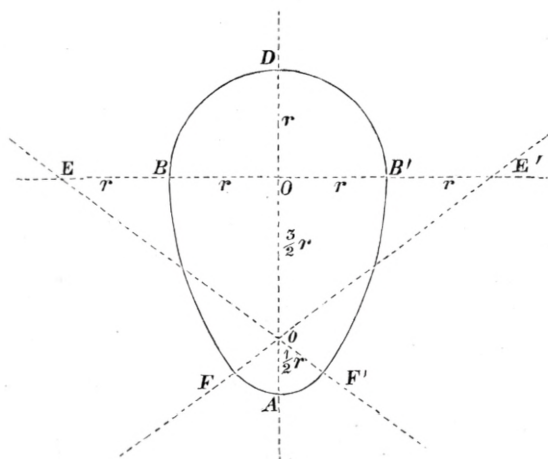
Endelig bemærkes med Hensyn paa de paraboliske Vandledninger, at de to Formler (86) og (89) lade sig fremstille under Formen:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot \delta \cdot \left(\frac{U_p}{N_p} \right)^2} \text{ og } \\ q &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g \cos \omega \cdot \delta \cdot U_m^2}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91)$$

hvor N_p bestemmes ved Hjælp af Tabel 4, naar $u_p = \frac{U_p}{\delta}$ er funden, hvilke Formler ere meget bekvemme for Bestemmelsen af en given Lednings Vandføring under forskellige Fyldningsgrader, naar man een Gang for alle har bestemt Constanterne $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sin \omega}{\alpha} \delta}$ og $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g \cos \omega \cdot \delta}$.

Vandledninger, hvis Tversningsform er en Parabel, ere som bekendt meget sjeldne, men ikke desto mindre finde disse Formler dog en temmelig udstrakt Anvendelse, idet man med en stor Grad af Tilnærmelse kan betragte de almindeligt forekommende og særdeles hensigtsmæssige ægformede Cloakledninger som Ledninger med et parabolisk Tværsnit.

De ægformede Vandledninger, som i Reglen benyttes til Afledning af Spildevand, have nemlig som oftest den Form, som vedføjede Figur angiver, og jeg skal derfor som Exempel vise, hvorledes de udviklede Formler lade sig anvende herpaa.



Med Hensyn til Constructionen af denne Classe af ægformede Ledninger bemærkes: at, naar vi sætte Radius OD til Tophvælvingen BDB' lig r , saa er Radius til Buen FAF' eller $Ao = \frac{1}{2} r$, og Radius $EF' = E'F$ til Sidebuerne BF og $B'F'$ blive da $= 3r$, idet Centrene for de forskjellige Buer respective ere Punkterne O, o, E' og E . Ledningens hele Høide er $AD = 3r$, hvilken Høide vi ville betegne med H . Ved

denne Classe af Ledninger har den nedenfor Foden af Tophvælvingen værende Deel BAB' en Form, der nærmer sig til den paraboliske, og da man i Reglen gjør Regning paa, at disse Cloakledninger kun i yderst sjeldne Tilfælde skulle fyldes høiere end til BB' , saa vil man i sædvanlige Tilfælde kunne betragte dem som paraboliske Vandledninger, naar man

bestemmer Parablen saaledes, at den for en Vanddybde $OA = \frac{2}{3} H$ har samme Tværnsnitsareal, som den givne ægformede Ledning. Betingelsesligningen herfor er følgende:

$$\frac{4}{3} \sqrt{\delta \cdot \left(\frac{2}{3} H\right)^3} = 0,7555 \cdot \left(\frac{2}{3} H\right)^2,$$

hvoraf Parametren for Parablen findes at være:

$$\delta = 0,213 \cdot H \dots \dots \dots (92)$$

Til Oplysning om den Nøjagtighed, hvormed den betragtede Parabel slutter sig til den ægformede Ledning, tjener følgende Sammenstilling:

| Vandhoide over Bunden. | Vandspeillets Brede | | |
|---------------------------|---------------------|---------------|-------------|
| | for Ægovalen. | for Parablen. | Differents. |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,2 . r | 0,80 . r | 0,72 . r | - 0,08 . r |
| 0,5 . r | 1,20 . r | 1,12 . r | - 0,08 . r |
| 1,58 . r | 1,87 . r | 1,87 . r | 0,00 . r |
| 2,00 . r | 2,00 . r | 2,27 . r | + 0,27 . r |

Indsætte vi Værdien for δ , ifølge (92), i Formlerne (87) og (91) erholdes

$$S = 0,616 \sqrt{H} \cdot U^3 \dots \dots \dots (87. a.)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= 0,503 \sqrt{\frac{\sin \omega}{\alpha} \cdot H} \cdot \frac{U_p^2}{N_p^2} \\ q &= 2,81 \sqrt{H} \cdot U_m^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91. a.)$$

hvor N_p bestemmes ved Hjælp af Tabel 4 derved, at

$$u_p = 4,7 \cdot \frac{U_p}{H}.$$

B. Vandledninger med cirkelformet Tværnsnit.

Fra disse Betragtninger over de paraboliske og ægformede Ledninger ville vi nu gaae over til at undersøge de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne danne sig under Vandets Bevægelse igjennem en lukket cylindrisk Vandledning, hvis Tværnsnit er en Cirkel.

Tænke vi os en cirkelformet, cylindrisk Ledning at være gennemstrømmet af en Vandmængde, som i alle Punkter af Ledningen er constant, saa vil Strømmens Tværnsnitsareal i det vilkaarlige Punkt, hvis Afstand fra det Punkt af Ledningen, vi have valgt som Begyndelsespunkt, er λ , være fuldstændigt bestemt, naar Centervinklen θ svarende til det Segment, som begrænder Strømmen, samt Ledningens Radius δ , ere bekendte. For en

hvilken som helst Centervinkel θ , svarende til det betragtede Punkt, hvis Abscisse = λ , kan man nemlig fremstille Vandstrømmens Dybde i den reducerede Ledning, svarende til Radius = 1, ved

$$u = \left(1 - \cos \frac{1}{2} \theta\right) \dots \dots \dots (93)$$

Strømmens Tværnsitsareal ved

$$f(u) = \frac{\theta - \sin \theta}{2} \dots \dots \dots (94)$$

og den af Strømmen beskyllede Contour ved

$$F(u) = \theta \dots \dots \dots (95)$$

Naar nu derhos bemærkes, at

$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \theta$, og at $f'(u) = 2 \sin \frac{1}{2} \theta$, saa finde vi ifølge (23)

$$\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3} \text{ og } \psi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3} \dots \dots \dots (96)$$

og indsætte vi disse Værdier for φ og ψ i Formlen (31), erholdes let følgende Ligning:

$$d\lambda = \frac{\delta}{2 \cdot g \alpha} \cdot \frac{\psi_m - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3}}{\varphi_p - \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3}} \cdot \sin \frac{1}{2} \theta \cdot d\theta \dots \dots \dots (97)$$

For dernæst at finde $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$, $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ samt $\left(\frac{d\varphi}{du}\right) : \left(\frac{d\psi}{du}\right)$, som indgaae i Formlerne (32) og (36), differentieres Formlerne (96); herved erholdes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{du} &= \frac{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right) - 3\theta \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{M^2}, & \frac{d\psi}{du} &= \frac{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right) \cos \frac{1}{2} \theta - 6 \sin^3 \frac{1}{2} \theta}{M^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (98)$$

idet $M^2 = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \theta \left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^4$ stedse er positiv;

og deraf:

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)} = \frac{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right) - 3\theta \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right) \cos \frac{1}{2} \theta - 6 \sin^3 \frac{1}{2} \theta} \dots \dots \dots (99)$$

Af Formlen (97) følger fremdeles:

$$\lambda = \frac{\delta}{2 \cdot g \alpha} \int \frac{\psi_m - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \theta}{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3}}{\varphi_p - \frac{\left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3}{\theta}} \cdot \sin \frac{1}{2} \theta \cdot d\theta + \text{Const.} \dots \dots \dots (100)$$

hvilken Integration dog ikke kan udføres under endelig Form.

Vi maae derfor tage vor Tilflugt til en approximativ Beregning og ville til den Ende udføre Integrationen imellem saa snevre Grændser, at vi uden mærkelig Feil kunne ansee $\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)$ og $\left(\frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \theta}\right)$ som constante i hele det betragtede Interval. Gjøre vi dette, saa kan Integrationen udføres under endelig Form. For Kortheds Skyld sætte vi

$$\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = a \text{ og } \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \theta}\right) = b$$

hvorefter Formlen (100) skrives:

$$\lambda = \frac{\delta b}{8 \cdot g \alpha} \int_{\theta}^{(\theta + \varepsilon)} \frac{\psi_m \cdot \theta^2 - \frac{b}{\left(\frac{1-a}{2}\right)^3}}{\varphi_p \cdot \theta^2 - \frac{1}{\left(\frac{1-a}{2}\right)^3}} \cdot d(\theta^2), \dots \dots \dots (101)$$

idet vi tænke os Integrationen udført imellem $(\theta + \varepsilon)$ og θ , og idet λ altsaa er Længden af Ledningen fra det Punkt, hvori Fyldningsgraden er $(\theta + \varepsilon)$, til det, hvori den er θ .

Vi ville først betragte det specielle Tilfælde, hvor Ledningen er horizontal, altsaa $\sin \omega = 0$ og $\varphi_p = 0$. Formlen (101) kan da skrives:

$$\lambda = -\frac{\delta b}{8 \cdot g \alpha} \int_{\theta}^{(\theta + \varepsilon)} \left(\psi_m \left(\frac{1-a}{2}\right)^3 \cdot \theta^2 - b \right) \cdot d(\theta^2)$$

og naar Integrationen udføres, erholdes:

$$\lambda = -\frac{\delta \cdot b}{8 \cdot g \alpha} \left[\psi_m \left(\frac{1-a}{2}\right)^3 ((\theta + \varepsilon)^2 + \theta^2) - b \right] ((\theta + \varepsilon)^2 - \theta^2),$$

der ogsaa kan fremstilles under følgende Form:

$$\lambda = -\frac{\delta b}{4 \cdot g \alpha} \left[\psi_m \left(\frac{1-a}{2}\right)^3 \left(\left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \right) - b \right] \left(\theta + \frac{1}{2} \varepsilon\right) \varepsilon \dots \dots (102)$$

Hvis ε er ganske lille i Sammenligning med θ , saa kan denne Formel skrives:

$$\lambda = -\frac{\delta}{4g\alpha} \cdot \frac{\psi}{\varphi} \cdot \frac{\psi_m - \psi}{\varphi} \cdot \left(\theta + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \cdot \varepsilon \dots \dots \dots (103)$$

idet vi ved φ og ψ betegne de Værdier, som svare til Fyldningsgraden $\left(\theta + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$. Er derimod Fyldningsgraden $\left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ikke saa stor, at vi kunne udelade Størrelsen $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ i Sammenligning dermed, saa maae vi ifølge (102) beregne λ efter Formlen

$$\lambda = -\frac{\delta}{4g\alpha} \cdot \frac{\psi}{\varphi} \left[\frac{\psi_m - \psi}{\varphi} + \frac{\psi_m}{\varphi} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\theta + \frac{\varepsilon}{2}} \right)^2 \right] \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \varepsilon \dots \dots \dots (104)$$

Naar Ledningen ikke er horizontal, — altsaa naar φ_p ikke er Nul —, saa vil Udtrykket under Integraltegnet i Formlen (101) kunne skrives saaledes:

$$\frac{\psi_m \cdot d(\theta^2) + \left(\frac{\psi_m}{\varphi_p} - b\right) \frac{d \cdot (\theta^2)}{\varphi_p \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3 \cdot \theta^2 - 1},$$

og naar Integrationen udføres, erhoides altsaa:

$$\lambda = \frac{\delta \cdot b}{8 \cdot g\alpha} \left[\frac{\psi_m}{\varphi_p} ((\theta + \varepsilon)^2 - \theta^2) + \frac{\psi_m - b}{\varphi_p \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3} \text{Log} \frac{\frac{\varphi_p \left(\frac{\theta + \varepsilon}{2}\right)^2 \div 1}{\varphi \left(\frac{\theta + \varepsilon}{2}\right)^2 \div 1}}{\frac{\varphi_p \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \div 1}{\varphi \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \div 1}} \right],$$

hvor Log angiver den naturlige Logarithme. Men da $(\theta + \varepsilon)^2 - \theta^2 = 2\left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \varepsilon$ og

$$\frac{\psi_m - b}{\varphi_p \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3} = \left(\frac{\psi_m}{\varphi_p} - \frac{\psi}{\varphi}\right) \frac{\varphi}{\varphi_p} \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2,$$

saa finde vi

$$\lambda = \frac{\delta}{4 \cdot g\alpha} \cdot \frac{\psi}{\varphi} \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left[\frac{\psi_m}{\varphi_p} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_m}{\varphi_p} - \frac{\psi}{\varphi}\right) \frac{\varphi}{\varphi_p} \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{Log} \frac{\varphi_p (\theta + \varepsilon)^2 - \varphi \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\varphi_p \cdot \theta^2 - \varphi \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right] (105)$$

Naar ε er meget lille imod θ , har man

$$\left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{Log} \frac{\varphi_p (\theta + \varepsilon)^2 - \varphi \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\varphi_p \theta^2 - \varphi \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = 2 \frac{\varphi_p \cdot \varepsilon}{\varphi_p - \varphi}, \text{ og i saadant Tilfælde reducerer}$$

Formlen (105) sig til følgende:

$$\lambda = \frac{\delta}{4 \cdot g \alpha} \cdot \frac{\psi}{\varphi} \cdot \frac{\psi_m - \psi}{\varphi_p - \varphi} \left(\theta + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \varepsilon \dots \dots \dots (106)$$

Man seer let, at denne Formel forvandler sig til den tidligere fundne Formel (103), naar vi antage, at $\varphi_p = 0$, og det viser sig altsaa, at vi kunne anvende Formlen (106) i alle Tilfælde, hvor ε er meget lille imod θ , uden Hensyn til om Ledningens Fald er positivt, negativt eller Nul.

For at erholde et Overblik over de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne fremkomme i en cylindrisk Ledning med cirkelformet Tværsnit, ville vi underkaste de almindelige Formler (31) til (36) i Forbindelse med Formlerne (93) til (99) en lignende Betragtning, som vi i det Foregaaende have anvendt paa Formlerne (64) til (67), svarende til den rectangulære Ledning, og hvorigjennem vi kom til Erkjendelsen af den rectangulære Lednings Vandspeilsformers Natur og Egenskaber.

En saadan Undersøgelse saavel som de Beregninger, hvortil forskjellige herhenhørende Problemer give Anledning, vil i en mærkelig Grad lettes, naar vi forud beregne en Tabel, som indeholder Værdierne af visse Functioner af Ledningens Fyldningsgrad θ , svarende til en Række af Værdier af Vinklen θ , idet det derved bliver muligt, naar en af disse Functioner er given, med Lethed at finde de andre Functioner, der svare til samme Fyldningsgrad.

De Functioner, hvorom der saaledes bliver Spørgsmaal, ere fornemmelig φ og ψ , bestemte

ved Formlerne (96), samt Forholdet mellem disse $\left(\frac{\psi}{\varphi} \right) = \sin \frac{\frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \theta}$; hvorhos et Overblik

over Functionerne $\left(\frac{d\varphi}{du} \right) M^2$ og $\left(\frac{d\psi}{du} \right) M^2$ bestemte ved Formlerne (98) samt over For-

holdet mellem disse $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du} \right)}{\left(\frac{d\psi}{du} \right)}$ bestemt ved Formlen (99), vil lette Betragtningen.

Men det vil derhos være beqvemt for Beregningen af opgivne Problemer at tilføie Værdierne af følgende Functioner af Fyldningsgraden, nemlig: Vandstrømmens Dybde u , ifølge Formlen (93), Strømmens Tværsnitsareal $f(u)$, ifølge Formlen (94), og den rectificerede Bue $F(u)$, ifølge (95).

Resultatet af en saadan Beregning og Sammenstilling, som jeg har udført, findes i efterfølgende Tabel 6 angivet for hver Grad og for hver 10de Grad efter Fornødenhed. For de smaa Fyldningsgrader, mellem 0 og 30, har jeg ikke bestemt Værdierne, eftersom disse kun have liden Anvendelse.

Tabel 6.

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)$ | $\varphi = \left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3$ | $\psi = \left(\frac{\theta - \sin \theta}{2}\right)^3$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ |
|--------------------------------------|--|--|---|---|--|--|--|--|--|
| 0° | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 8 | 8 | 1,0000 | 0,000 | 0,000 | 1,00 |
| 30 | 0,5256 | 0,0341 | 0,0118 | 318680 | 315060 | 0,9886 | - 0,093 | - 0,092 | 1,01 |
| 31 | 0,5411 | 0,0364 | 0,0130 | 245720 | 242710 | 0,9878 | | | |
| 32 | 0,5585 | 0,0387 | 0,0143 | 191400 | 188920 | 0,9870 | | | |
| 33 | 0,5760 | 0,0412 | 0,0157 | 149990 | 147910 | 0,9862 | | | |
| 34 | 0,5934 | 0,0437 | 0,0171 | 118470 | 116740 | 0,9854 | | | |
| 35 | 0,6109 | 0,0463 | 0,0186 | 94324 | 92858 | 0,9845 | | | |
| 36 | 0,6283 | 0,0489 | 0,0203 | 75444 | 74210 | 0,9836 | | | |
| 37 | 0,6458 | 0,0517 | 0,0220 | 60815 | 59761 | 0,9827 | | | |
| 38 | 0,6632 | 0,0545 | 0,0238 | 49519 | 48422 | 0,9818 | | | |
| 39 | 0,6807 | 0,0574 | 0,0257 | 40194 | 39421 | 0,9808 | | | |
| 40 | 0,6981 | 0,0603 | 0,0277 | 32953 | 32589 | 0,9798 | - 0,217 | - 0,212 | 1,02 |
| 41 | 0,7156 | 0,0633 | 0,0298 | 27151 | 26575 | 0,9788 | | | |
| 42 | 0,7330 | 0,0664 | 0,0320 | 22475 | 21976 | 0,9778 | | | |
| 43 | 0,7505 | 0,0696 | 0,0343 | 18680 | 18246 | 0,9767 | | | |
| 44 | 0,7679 | 0,0728 | 0,0366 | 15611 | 15231 | 0,9756 | | | |
| 45 | 0,7854 | 0,0761 | 0,0392 | 13089 | 12757 | 0,9745 | | | |
| 46 | 0,8029 | 0,0795 | 0,0418 | 11025 | 10731 | 0,9734 | | | |
| 47 | 0,8203 | 0,0829 | 0,0445 | 9321,6 | 9062,6 | 0,9722 | | | |
| 48 | 0,8378 | 0,0865 | 0,0473 | 7912,1 | 7682,3 | 0,9710 | | | |
| 49 | 0,8552 | 0,0900 | 0,0503 | 6739,9 | 6536,4 | 0,9698 | | | |
| 50 | 0,8727 | 0,0937 | 0,0533 | 5760,2 | 5578,9 | 0,9685 | - 0,414 | - 0,404 | 1,03 |
| 51 | 0,8901 | 0,0974 | 0,0565 | 4937,4 | 4776,4 | 0,9673 | | | |
| 52 | 0,9076 | 0,1012 | 0,0598 | 4248,3 | 4103,8 | 0,9660 | | | |
| 53 | 0,9250 | 0,1051 | 0,0632 | 3666,0 | 3536,8 | 0,9647 | | | |
| 54 | 0,9425 | 0,1090 | 0,0667 | 3171,9 | 3053,8 | 0,9634 | | | |
| 55 | 0,9599 | 0,1130 | 0,0704 | 2752,3 | 2648,0 | 0,9621 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|--|--|--|
| 56° | 0,9774 | 0,1171 | 0,0742 | 2395,4 | 2301,2 | 0,9607 | | | |
| 57 | 0,9948 | 0,1212 | 0,0781 | 2089,9 | 2004,8 | 0,9593 | | | |
| 58 | 1,0123 | 0,1254 | 0,0821 | 1827,9 | 1750,8 | 0,9578 | | | |
| 59 | 1,0297 | 0,1296 | 0,0863 | 1602,6 | 1532,8 | 0,9564 | | | |
| 60 | 1,0472 | 0,1340 | 0,0906 | 1408,6 | 1345,1 | 0,9549 | - 0,695 | - 0,671 | 1,04 |
| 61 | 1,0647 | 0,1384 | 0,0950 | 1241,0 | 1185,2 | 0,9534 | | | |
| 62 | 1,0821 | 0,1428 | 0,0996 | 1095,9 | 1045,2 | 0,9519 | | | |
| 63 | 1,0996 | 0,1474 | 0,1043 | 969,55 | 921,55 | 0,9504 | | | |
| 64 | 1,1170 | 0,1520 | 0,1091 | 859,99 | 815,76 | 0,9488 | | | |
| 65 | 1,1345 | 0,1566 | 0,1141 | 764,14 | 723,80 | 0,9472 | | | |
| 66 | 1,1519 | 0,1615 | 0,1192 | 680,29 | 643,30 | 0,9456 | | | |
| 67 | 1,1694 | 0,1661 | 0,1244 | 606,98 | 572,97 | 0,9440 | | | |
| 68 | 1,1868 | 0,1710 | 0,1298 | 542,45 | 511,17 | 0,9424 | | | |
| 69 | 1,2043 | 0,1759 | 0,1354 | 485,68 | 456,86 | 0,9407 | | | |
| 70 | 1,2217 | 0,1808 | 0,1410 | 435,63 | 409,05 | 0,9390 | - 1,066 | - 1,017 | 1,05 |
| 71 | 1,2392 | 0,1859 | 0,1468 | 391,48 | 366,90 | 0,9373 | | | |
| 72 | 1,2566 | 0,1910 | 0,1528 | 352,31 | 329,60 | 0,9355 | | | |
| 73 | 1,2741 | 0,1961 | 0,1589 | 317,62 | 296,57 | 0,9337 | | | |
| 74 | 1,2915 | 0,2014 | 0,1651 | 286,78 | 267,27 | 0,9319 | | | |
| 75 | 1,3090 | 0,2066 | 0,1715 | 259,32 | 241,20 | 0,9301 | | | |
| 76 | 1,3265 | 0,2120 | 0,1781 | 234,88 | 218,03 | 0,9283 | | | |
| 77 | 1,3439 | 0,2174 | 0,1848 | 213,05 | 197,37 | 0,9264 | | | |
| 78 | 1,3614 | 0,2229 | 0,1916 | 193,55 | 178,94 | 0,9245 | | | |
| 79 | 1,3788 | 0,2284 | 0,1986 | 176,04 | 162,43 | 0,9226 | | | |
| 80 | 1,3963 | 0,2340 | 0,2057 | 160,35 | 147,64 | 0,9207 | - 1,525 | - 1,436 | 1,06 |
| 81 | 1,4137 | 0,2396 | 0,2130 | 146,27 | 134,39 | 0,9188 | | | |
| 82 | 1,4312 | 0,2453 | 0,2205 | 133,59 | 122,47 | 0,9168 | | | |
| 83 | 1,4486 | 0,2510 | 0,2280 | 122,16 | 111,75 | 0,9148 | | | |
| 84 | 1,4661 | 0,2569 | 0,2358 | 111,85 | 102,10 | 0,9128 | | | |
| 85 | 1,4835 | 0,2627 | 0,2437 | 102,55 | 93,405 | 0,9108 | | | |
| 86 | 1,5010 | 0,2686 | 0,2517 | 94,181 | 85,529 | 0,9087 | | | |
| 87 | 1,5184 | 0,2746 | 0,2599 | 86,489 | 78,417 | 0,9066 | | | |
| 88 | 1,5359 | 0,2807 | 0,2683 | 79,569 | 71,975 | 0,9045 | | | |
| 89 | 1,5533 | 0,2867 | 0,2768 | 73,281 | 66,133 | 0,9024 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \left(\frac{\theta}{\theta - \sin\theta}\right)^3$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 =$ $f(u) = 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 =$ $f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$ $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|---|---|---|
| 90° | 1,5708 | 0,2929 | 0,2854 | 67,572 | 60,858 | 0,9003 | - 2,07 | - 1,92 | 1,08 |
| 91 | 1,5882 | 0,2991 | 0,2942 | 62,568 | 56,017 | 0,8981 | | | |
| 92 | 1,6057 | 0,3053 | 0,3032 | 57,650 | 51,656 | 0,8959 | | | |
| 93 | 1,6232 | 0,3116 | 0,3123 | 53,310 | 47,647 | 0,8937 | | | |
| 94 | 1,6406 | 0,3180 | 0,3215 | 49,559 | 44,008 | 0,8915 | | | |
| 95 | 1,6581 | 0,3244 | 0,3309 | 45,750 | 40,686 | 0,8893 | | | |
| 96 | 1,6755 | 0,3309 | 0,3405 | 42,440 | 37,648 | 0,8871 | | | |
| 97 | 1,6930 | 0,3374 | 0,3502 | 39,416 | 34,874 | 0,8848 | | | |
| 98 | 1,7104 | 0,3439 | 0,3601 | 36,636 | 32,350 | 0,8825 | | | |
| 99 | 1,7279 | 0,3506 | 0,3701 | 34,087 | 30,002 | 0,8802 | | | |
| 100 | 1,7453 | 0,3572 | 0,3803 | 31,739 | 27,860 | 0,8778 | - 2,70 | - 2,45 | 1,10 |
| 101 | 1,7628 | 0,3639 | 0,3905 | 29,585 | 25,901 | 0,8754 | | | |
| 102 | 1,7802 | 0,3707 | 0,4010 | 27,600 | 24,097 | 0,8730 | | | |
| 103 | 1,7977 | 0,3775 | 0,4117 | 25,769 | 22,436 | 0,8706 | | | |
| 104 | 1,8151 | 0,3843 | 0,4224 | 24,081 | 20,910 | 0,8682 | | | |
| 105 | 1,8326 | 0,3912 | 0,4333 | 22,507 | 19,489 | 0,8658 | | | |
| 106 | 1,8500 | 0,3982 | 0,4444 | 21,081 | 18,201 | 0,8633 | | | |
| 107 | 1,8675 | 0,4052 | 0,4556 | 19,748 | 17,001 | 0,8608 | | | |
| 108 | 1,8850 | 0,4122 | 0,4670 | 18,524 | 15,892 | 0,8583 | | | |
| 109 | 1,9024 | 0,4193 | 0,4784 | 17,370 | 14,867 | 0,8558 | | | |
| 110 | 1,9199 | 0,4264 | 0,4901 | 16,310 | 13,918 | 0,8533 | - 3,37 | - 3,02 | 1,12 |
| 111 | 1,9373 | 0,4336 | 0,5019 | 15,326 | 13,040 | 0,8508 | | | |
| 112 | 1,9548 | 0,4408 | 0,5138 | 14,412 | 12,225 | 0,8482 | | | |
| 113 | 1,9722 | 0,4481 | 0,5259 | 13,563 | 11,469 | 0,8456 | | | |
| 114 | 1,9897 | 0,4554 | 0,5381 | 12,772 | 10,767 | 0,8430 | | | |
| 115 | 2,0071 | 0,4627 | 0,5504 | 12,036 | 10,116 | 0,8404 | | | |
| 116 | 2,0248 | 0,4701 | 0,5629 | 11,353 | 9,510 | 0,8378 | | | |
| 117 | 2,0420 | 0,4775 | 0,5755 | 10,713 | 8,947 | 0,8351 | | | |
| 118 | 2,0595 | 0,4850 | 0,5883 | 10,116 | 8,421 | 0,8324 | | | |
| 119 | 2,0769 | 0,4925 | 0,6012 | 9,560 | 7,932 | 0,8297 | | | |
| 120 | 2,0944 | 0,5000 | 0,6142 | 9,040 | 7,476 | 0,8270 | - 4,11 | - 3,54 | 1,16 |
| 121 | 2,1118 | 0,5075 | 0,6273 | 8,554 | 7,051 | 0,8243 | | | |
| 122 | 2,1293 | 0,5152 | 0,6406 | 8,080 | 6,638 | 0,8215 | | | |
| 123 | 2,1468 | 0,5228 | 0,6540 | 7,675 | 6,283 | 0,8187 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $q = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{q} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|---|--|--|
| 124° | 2,1642 | 0,5305 | 0,6676 | 7,291 | 5,949 | 0,8159 | | | |
| 125 | 2,1817 | 0,5383 | 0,6813 | 6,900 | 5,611 | 0,8131 | | | |
| 126 | 2,1991 | 0,5460 | 0,6950 | 6,550 | 5,307 | 0,8103 | | | |
| 127 | 2,2166 | 0,5538 | 0,7090 | 6,220 | 5,023 | 0,8075 | | | |
| 128 | 2,2340 | 0,5616 | 0,7230 | 5,911 | 4,756 | 0,8047 | | | |
| 129 | 2,2515 | 0,5695 | 0,7372 | 5,6207 | 4,5065 | 0,8018 | | | |
| 130 | 2,2689 | 0,5774 | 0,7514 | 5,3475 | 4,2721 | 0,7989 | — 4,84 | — 4,15 | 1,17 |
| 131 | 2,2864 | 0,5853 | 0,7658 | 5,0901 | 4,0516 | 0,7960 | | | |
| 132 | 2,3038 | 0,5933 | 0,7803 | 4,8485 | 3,8452 | 0,7931 | | | |
| 133 | 2,3215 | 0,6013 | 0,7950 | 4,6204 | 3,6507 | 0,7902 | | | |
| 134 | 2,3387 | 0,6093 | 0,8097 | 4,4057 | 3,4681 | 0,7872 | | | |
| 135 | 2,3562 | 0,6173 | 0,8245 | 4,2032 | 3,2963 | 0,7842 | | | |
| 136 | 2,3736 | 0,6254 | 0,8395 | 4,0119 | 3,1271 | 0,7812 | | | |
| 137 | 2,3911 | 0,6335 | 0,8546 | 3,8316 | 2,9852 | 0,7782 | | | |
| 138 | 2,4086 | 0,6416 | 0,8697 | 3,6614 | 2,8384 | 0,7752 | | | |
| 139 | 2,4260 | 0,6498 | 0,8850 | 3,5002 | 2,7029 | 0,7722 | | | |
| 140 | 2,4435 | 0,6580 | 0,9003 | 3,3480 | 2,5751 | 0,7692 | — 5,57 | — 4,67 | 1,19 |
| 141 | 2,4609 | 0,6662 | 0,9158 | 3,2040 | 2,4546 | 0,7661 | | | |
| 142 | 2,4784 | 0,6744 | 0,9314 | 3,0679 | 2,3408 | 0,7630 | | | |
| 143 | 2,4958 | 0,6827 | 0,9470 | 2,9387 | 2,2333 | 0,7599 | | | |
| 144 | 2,5133 | 0,6910 | 0,9627 | 2,8165 | 2,1316 | 0,7568 | | | |
| 145 | 2,5307 | 0,6993 | 0,9786 | 2,7005 | 2,0354 | 0,7537 | | | |
| 146 | 2,5482 | 0,7076 | 0,9945 | 2,5908 | 1,9446 | 0,7506 | | | |
| 147 | 2,5656 | 0,7160 | 1,0105 | 2,4864 | 1,8584 | 0,7475 | | | |
| 148 | 2,5831 | 0,7244 | 1,0266 | 2,3875 | 1,7769 | 0,7433 | | | |
| 149 | 2,6005 | 0,7328 | 1,0428 | 2,2933 | 1,6996 | 0,7401 | | | |
| 150 | 2,6180 | 0,7412 | 1,0590 | 2,2043 | 1,6266 | 0,7379 | — 6,27 | — 5,12 | 1,22 |
| 151 | 2,6354 | 0,7496 | 1,0753 | 2,1196 | 1,5573 | 0,7347 | | | |
| 152 | 2,6529 | 0,7581 | 1,0917 | 2,0390 | 1,4915 | 0,7315 | | | |
| 153 | 2,6704 | 0,7666 | 1,1082 | 1,9621 | 1,4200 | 0,7283 | | | |
| 154 | 2,6878 | 0,7750 | 1,1247 | 1,8892 | 1,3697 | 0,7251 | | | |
| 155 | 2,7053 | 0,7836 | 1,1413 | 1,8198 | 1,3134 | 0,7218 | | | |
| 156 | 2,7227 | 0,7921 | 1,1580 | 1,7534 | 1,2598 | 0,7185 | | | |
| 157 | 2,7402 | 0,8006 | 1,1747 | 1,6904 | 1,2090 | 0,7152 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$ $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|--|---|--|--|--|---|
| 158° | 2,7576 | 0,8092 | 1,1915 | 1,6416 | 1,1687 | 0,7119 | | | |
| 159 | 2,7751 | 0,8178 | 1,2084 | 1,5727 | 1,1145 | 0,7086 | | | |
| 160 | 2,7925 | 0,8264 | 1,2253 | 1,5180 | 1,0707 | 0,7053 | - 6,90 | - 5,52 | 1,25 |
| 161 | 2,8100 | 0,8305 | 1,2422 | 1,4660 | 1,0291 | 0,7020 | | | |
| 162 | 2,8274 | 0,8436 | 1,2592 | 1,4162 | 0,9894 | 0,6987 | | | |
| 163 | 2,8449 | 0,8522 | 1,2763 | 1,3684 | 0,9514 | 0,6954 | | | |
| 164 | 2,8625 | 0,8608 | 1,2934 | 1,3229 | 0,9153 | 0,6920 | | | |
| 165 | 2,8798 | 0,8695 | 1,3105 | 1,2795 | 0,8810 | 0,6886 | | | |
| 166 | 2,8972 | 0,8781 | 1,3277 | 1,2379 | 0,8482 | 0,6852 | | | |
| 167 | 2,9147 | 0,8868 | 1,3449 | 1,1982 | 0,8169 | 0,6818 | | | |
| 168 | 2,9322 | 0,8955 | 1,3621 | 1,1603 | 0,7871 | 0,6784 | | | |
| 169 | 2,9496 | 0,9042 | 1,3794 | 1,1258 | 0,7585 | 0,6750 | | | |
| 170 | 2,9671 | 0,9128 | 1,3967 | 1,0890 | 0,7313 | 0,6715 | - 7,37 | - 5,80 | 1,28 |
| 171 | 2,9845 | 0,9215 | 1,4140 | 1,0556 | 0,7052 | 0,6681 | | | |
| 172 | 3,0020 | 0,9302 | 1,4314 | 1,0003 | 0,6803 | 0,6647 | | | |
| 173 | 3,0194 | 0,9390 | 1,4488 | 0,9929 | 0,6564 | 0,6612 | | | |
| 174 | 3,0369 | 0,9477 | 1,4662 | 0,9635 | 0,6337 | 0,6577 | | | |
| 175 | 3,0545 | 0,9564 | 1,4836 | 0,9353 | 0,6119 | 0,6542 | | | |
| 176 | 3,0718 | 0,9651 | 1,5010 | 0,9084 | 0,5911 | 0,6507 | | | |
| 177 | 3,0892 | 0,9738 | 1,5185 | 0,8824 | 0,5711 | 0,6472 | | | |
| 178 | 3,1067 | 0,9825 | 1,5359 | 0,8694 | 0,5519 | 0,6437 | | | |
| 179 | 3,1241 | 0,9913 | 1,5533 | 0,8536 | 0,5356 | 0,6402 | | | |
| 180 | 3,1416 | 1,0000 | 1,5708 | 0,8106 | 0,5160 | 0,6366 | - 7,85 | - 6,00 | 1,31 |
| 181 | 3,1590 | 1,0087 | 1,5885 | 0,7884 | 0,4991 | 0,6331 | | | |
| 182 | 3,1765 | 1,0175 | 1,6057 | 0,7673 | 0,4830 | 0,6296 | | | |
| 183 | 3,1940 | 1,0262 | 1,6231 | 0,7483 | 0,4684 | 0,6260 | | | |
| 184 | 3,2114 | 1,0349 | 1,6406 | 0,7275 | 0,4527 | 0,6224 | | | |
| 185 | 3,2289 | 1,0436 | 1,6580 | 0,7085 | 0,4384 | 0,6188 | | | |
| 186 | 3,2463 | 1,0523 | 1,6754 | 0,6903 | 0,4247 | 0,6152 | | | |
| 187 | 3,2638 | 1,0610 | 1,6928 | 0,6728 | 0,4115 | 0,6116 | | | |
| 188 | 3,2812 | 1,0698 | 1,7102 | 0,6560 | 0,3989 | 0,6080 | | | |
| 189 | 3,2987 | 1,0785 | 1,7276 | 0,6398 | 0,3867 | 0,6044 | | | |
| 190 | 3,3161 | 1,0872 | 1,7449 | 0,6242 | 0,3750 | 0,6008 | - 8,12 | - 6,08 | 1,33 |
| 191 | 3,3336 | 1,0958 | 1,7622 | 0,6093 | 0,3638 | 0,5972 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^2}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$ $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|--|---|---|
| 192° | 3,5510 | 1,1045 | 1,7795 | 0,5947 | 0,5550 | 0,5936 | | | |
| 193 | 3,5685 | 1,1152 | 1,7967 | 0,5808 | 0,5426 | 0,5899 | | | |
| 194 | 3,5859 | 1,1219 | 1,8139 | 0,5673 | 0,5326 | 0,5862 | | | |
| 195 | 3,4043 | 1,1504 | 1,8311 | 0,5545 | 0,5250 | 0,5825 | | | |
| 196 | 3,4208 | 1,1592 | 1,8482 | 0,5420 | 0,5136 | 0,5789 | | | |
| 197 | 3,4583 | 1,1478 | 1,8653 | 0,5297 | 0,5048 | 0,5755 | | | |
| 198 | 3,4558 | 1,1564 | 1,8824 | 0,5185 | 0,2962 | 0,5716 | | | |
| 199 | 3,4732 | 1,1695 | 1,8994 | 0,5073 | 0,2879 | 0,5679 | | | |
| 200 | 3,4907 | 1,1736 | 1,9163 | 0,4961 | 0,2799 | 0,5642 | - 8,24 | - 6,08 | 1,35 |
| 201 | 3,5081 | 1,1822 | 1,9332 | 0,4859 | 0,2722 | 0,5605 | | | |
| 202 | 3,5256 | 1,1908 | 1,9501 | 0,4757 | 0,2647 | 0,5568 | | | |
| 203 | 3,5430 | 1,1994 | 1,9669 | 0,4656 | 0,2576 | 0,5531 | - 8,242 (Maximum) | | |
| 204 | 3,5605 | 1,2079 | 1,9836 | 0,4563 | 0,2506 | 0,5494 | | | |
| 205 | 3,5779 | 1,2164 | 2,0003 | 0,4470 | 0,2440 | 0,5457 | | | |
| 206 | 3,5954 | 1,2250 | 2,0169 | 0,4384 | 0,2375 | 0,5420 | | | |
| 207 | 3,6128 | 1,2334 | 2,0334 | 0,4297 | 0,2313 | 0,5383 | | | |
| 208 | 3,6303 | 1,2419 | 2,0499 | 0,4217 | 0,2253 | 0,5346 | | | |
| 209 | 3,6477 | 1,2504 | 2,0663 | 0,4137 | 0,2195 | 0,5309 | | | |
| 210 | 3,6652 | 1,2588 | 2,0826 | 0,4058 | 0,2139 | 0,5271 | - 8,17 | - 6,05 | 1,35 |
| 211 | 3,6826 | 1,2672 | 2,0988 | 0,3984 | 0,2085 | 0,5234 | | | |
| 212 | 3,7001 | 1,2756 | 2,1150 | 0,3911 | 0,2032 | 0,5197 | | | |
| 213 | 3,7176 | 1,2840 | 2,1311 | 0,3843 | 0,1981 | 0,5159 | | | |
| 214 | 3,7350 | 1,2924 | 2,1471 | 0,3775 | 0,1932 | 0,5121 | | | |
| 215 | 3,7525 | 1,3007 | 2,1630 | 0,3708 | 0,1885 | 0,5083 | | | |
| 216 | 3,7699 | 1,3090 | 2,1789 | 0,3645 | 0,1839 | 0,5046 | | | |
| 217 | 3,7874 | 1,3173 | 2,1946 | 0,3583 | 0,1794 | 0,5009 | | | |
| 218 | 3,8048 | 1,3256 | 2,2102 | 0,3525 | 0,1751 | 0,4971 | | | |
| 219 | 3,8223 | 1,3338 | 2,2258 | 0,3467 | 0,1710 | 0,4933 | | | |
| 220 | 3,8397 | 1,3420 | 2,2413 | 0,3410 | 0,1669 | 0,4895 | | | |
| 221 | 3,8572 | 1,3502 | 2,2566 | 0,3357 | 0,1630 | 0,4857 | - 7,93 | - 5,75 | 1,38 |
| 222 | 3,8746 | 1,3584 | 2,2719 | 0,3304 | 0,1593 | 0,4819 | | | |
| 223 | 3,8921 | 1,3665 | 2,2870 | 0,3254 | 0,1557 | 0,4781 | | | |
| 224 | 3,9095 | 1,3746 | 2,3021 | 0,3204 | 0,1516 | 0,4743 | | | |
| 225 | 3,9270 | 1,3827 | 2,3171 | 0,3157 | 0,1485 | 0,4705 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strommens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cdot \left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|--|---|--|
| 226° | 3,9444 | 1,3907 | 2,3319 | 0,3111 | 0,1452 | 0,4667 | | | |
| 227 | 3,9619 | 1,3987 | 2,3466 | 0,3066 | 0,1419 | 0,4629 | | | |
| 228 | 3,9794 | 1,4067 | 2,3613 | 0,3024 | 0,1388 | 0,4591 | | | |
| 229 | 3,9968 | 1,4147 | 2,3758 | 0,2982 | 0,1357 | 0,4553 | | | |
| 250 | 4,0143 | 1,4226 | 2,3902 | 0,2940 | 0,1327 | 0,4515 | - 7,50 | - 5,59 | 1,55 |
| 231 | 4,0317 | 1,4305 | 2,4044 | 0,2901 | 0,1299 | 0,4477 | | | |
| 232 | 4,0492 | 1,4384 | 2,4186 | 0,2862 | 0,1271 | 0,4439 | | | |
| 233 | 4,0666 | 1,4462 | 2,4326 | 0,2826 | 0,1244 | 0,4401 | | | |
| 234 | 4,0841 | 1,4540 | 2,4466 | 0,2790 | 0,1218 | 0,4363 | | | |
| 235 | 4,1015 | 1,4617 | 2,4603 | 0,2754 | 0,1192 | 0,4325 | | | |
| 236 | 4,1190 | 1,4695 | 2,4740 | 0,2720 | 0,1167 | 0,4287 | | | |
| 237 | 4,1364 | 1,4772 | 2,4876 | 0,2687 | 0,1142 | 0,4249 | | | |
| 238 | 4,1539 | 1,4848 | 2,5010 | 0,2656 | 0,1119 | 0,4211 | | | |
| 239 | 4,1713 | 1,4925 | 2,5145 | 0,2625 | 0,1096 | 0,4173 | | | |
| 240 | 4,1888 | 1,5000 | 2,5274 | 0,2595 | 0,1073 | 0,4135 | - 6,97 | - 5,27 | 1,52 |
| 241 | 4,2062 | 1,5075 | 2,5404 | 0,2566 | 0,1051 | 0,4097 | | | |
| 242 | 4,2237 | 1,5150 | 2,5533 | 0,2537 | 0,1030 | 0,4059 | | | |
| 243 | 4,2412 | 1,5225 | 2,5661 | 0,2510 | 0,1010 | 0,4021 | | | |
| 244 | 4,2586 | 1,5299 | 2,5787 | 0,2484 | 0,0990 | 0,3983 | | | |
| 245 | 4,2761 | 1,5373 | 2,5912 | 0,2458 | 0,0970 | 0,3945 | | | |
| 246 | 4,2935 | 1,5446 | 2,6035 | 0,2433 | 0,0951 | 0,3907 | | | |
| 247 | 4,3110 | 1,5519 | 2,6157 | 0,2409 | 0,0932 | 0,3869 | | | |
| 248 | 4,3284 | 1,5592 | 2,6278 | 0,2386 | 0,0914 | 0,3831 | | | |
| 249 | 4,3459 | 1,5664 | 2,6397 | 0,2363 | 0,0896 | 0,3793 | | | |
| 250 | 4,3633 | 1,5736 | 2,6515 | 0,2340 | 0,0879 | 0,3755 | - 6,15 | - 4,80 | 1,29 |
| 251 | 4,3808 | 1,5807 | 2,6632 | 0,2319 | 0,0862 | 0,3717 | | | |
| 252 | 4,3982 | 1,5878 | 2,6746 | 0,2299 | 0,0846 | 0,3679 | | | |
| 253 | 4,4157 | 1,5948 | 2,6860 | 0,2279 | 0,0830 | 0,3641 | | | |
| 254 | 4,4331 | 1,6018 | 2,6972 | 0,2259 | 0,0814 | 0,3603 | | | |
| 255 | 4,4506 | 1,6088 | 2,7083 | 0,2240 | 0,0799 | 0,3565 | | | |
| 256 | 4,4680 | 1,6157 | 2,7192 | 0,2222 | 0,0784 | 0,3527 | | | |
| 257 | 4,4855 | 1,6225 | 2,7299 | 0,2205 | 0,0769 | 0,3489 | | | |
| 258 | 4,5029 | 1,6293 | 2,7406 | 0,2188 | 0,0755 | 0,3451 | | | |
| 259 | 4,5204 | 1,6361 | 2,7511 | 0,2171 | 0,0741 | 0,3413 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|--|--|--|
| 260° | 4,5379 | 1,6428 | 2,7613 | 0,2155 | 0,0728 | 0,3376 | — 5,20 | — 4,53 | 1,15 |
| 261 | 4,5555 | 1,6494 | 2,7715 | 0,2140 | 0,0715 | 0,3338 | | | |
| 262 | 4,5728 | 1,6561 | 2,7815 | 0,2125 | 0,0702 | 0,3300 | | | |
| 263 | 4,5902 | 1,6626 | 2,7914 | 0,2111 | 0,0689 | 0,3262 | | | |
| 264 | 4,6077 | 1,6691 | 2,8011 | 0,2097 | 0,0676 | 0,3225 | | | |
| 265 | 4,6251 | 1,6756 | 2,8107 | 0,2083 | 0,0664 | 0,3188 | | | |
| 266 | 4,6426 | 1,6820 | 2,8201 | 0,2070 | 0,0652 | 0,3150 | | | |
| 267 | 4,6600 | 1,6884 | 2,8293 | 0,2058 | 0,0640 | 0,3112 | | | |
| 268 | 4,6775 | 1,6947 | 2,8384 | 0,2046 | 0,0629 | 0,3075 | | | |
| 269 | 4,6949 | 1,7009 | 2,8474 | 0,2034 | 0,0618 | 0,3038 | | | |
| 270 | 4,7124 | 1,7071 | 2,8562 | 0,2022 | 0,0607 | 0,3001 | — 4,19 | — 4,15 | 1,02 |
| 271 | 4,7298 | 1,7133 | 2,8648 | 0,2012 | 0,0596 | 0,2963 | | | |
| 272 | 4,7473 | 1,7193 | 2,8733 | 0,2002 | 0,0585 | 0,2926 | | | |
| 273 | 4,7647 | 1,7254 | 2,8817 | 0,1992 | 0,0575 | 0,2889 | | | |
| 274 | 4,7822 | 1,7314 | 2,8899 | 0,1982 | 0,0565 | 0,2852 | | | |
| 275 | 4,7997 | 1,7373 | 2,8979 | 0,1972 | 0,0555 | 0,2815 | | | |
| 276 | 4,8171 | 1,7431 | 2,9058 | 0,1964 | 0,0545 | 0,2778 | | | |
| 277 | 4,8346 | 1,7490 | 2,9136 | 0,1957 | 0,0535 | 0,2741 | | | |
| 278 | 4,8520 | 1,7547 | 2,9211 | 0,1950 | 0,0526 | 0,2704 | | | |
| 279 | 4,8695 | 1,7604 | 2,9286 | 0,1943 | 0,0517 | 0,2667 | | | |
| 280 | 4,8869 | 1,7660 | 2,9359 | 0,1936 | 0,0508 | 0,2631 | — 3,06 | — 3,89 | 0,79 |
| 281 | 4,9044 | 1,7716 | 2,9430 | 0,1928 | 0,0499 | 0,2594 | | | |
| 282 | 4,9218 | 1,7771 | 2,9500 | 0,1920 | 0,0490 | 0,2557 | | | |
| 283 | 4,9393 | 1,7826 | 2,9568 | 0,1912 | 0,0481 | 0,2520 | | | |
| 284 | 4,9567 | 1,7880 | 2,9635 | 0,1905 | 0,0473 | 0,2484 | | | |
| 285 | 4,9742 | 1,7934 | 2,9701 | 0,1898 | 0,0465 | 0,2448 | | | |
| 286 | 4,9916 | 1,7986 | 2,9765 | 0,1893 | 0,0456 | 0,2411 | | | |
| 287 | 5,0091 | 1,8039 | 2,9827 | 0,1888 | 0,0448 | 0,2374 | | | |
| 288 | 5,0265 | 1,8090 | 2,9888 | 0,1883 | 0,0440 | 0,2338 | | | |
| 289 | 5,0440 | 1,8141 | 2,9948 | 0,1878 | 0,0432 | 0,2302 | | | |
| 290 | 5,0615 | 1,8192 | 3,0006 | 0,1873 | 0,0425 | 0,2266 | — 2,00 | — 3,58 | 0,56 |
| 291 | 5,0789 | 1,8241 | 3,0062 | 0,1869 | 0,0417 | 0,2230 | | | |
| 292 | 5,0964 | 1,8290 | 3,0118 | 0,1865 | 0,0409 | 0,2194 | | | |
| 293 | 5,1138 | 1,8339 | 3,0172 | 0,1861 | 0,0401 | 0,2158 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F'(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 =$ $f(u) = 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 =$ $f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$ $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|---|--|--|---|---|--|---|---|---|
| 294° | 5,1513 | 1,8387 | 3,0224 | 0,1858 | 0,0594 | 0,2122 | | | |
| 295 | 5,1487 | 1,8434 | 3,0275 | 0,1855 | 0,0587 | 0,2087 | | | |
| 296 | 5,1662 | 1,8480 | 3,0325 | 0,1852 | 0,0580 | 0,2051 | | | |
| 297 | 5,1836 | 1,8526 | 3,0375 | 0,1850 | 0,0573 | 0,2015 | | | |
| 298 | 5,2011 | 1,8572 | 3,0420 | 0,1848 | 0,0566 | 0,1980 | | | |
| 299 | 5,2185 | 1,8616 | 3,0466 | 0,1846 | 0,0559 | 0,1945 | | | |
| 500 | 5,2360 | 1,8660 | 3,0510 | 0,1844 | 0,0552 | 0,1910 | - 0,88 | - 3,33 | 0,26 |
| 501 | 5,2534 | 1,8704 | 3,0555 | 0,1842 | 0,0545 | 0,1875 | | | |
| 502 | 5,2709 | 1,8746 | 3,0595 | 0,1841 | 0,0538 | 0,1840 | | | |
| 505 | 5,2883 | 1,8788 | 3,0635 | 0,1840 | 0,0531 | 0,1805 | | | |
| 504 | 5,5058 | 1,8829 | 3,0674 | 0,1839 | 0,0525 | 0,1770 | | | |
| 505 | 5,3233 | 1,8870 | 3,0712 | 0,1838 | 0,0519 | 0,1735 | | | |
| 506 | 5,3407 | 1,8910 | 3,0749 | 0,1837 | 0,0512 | 0,1700 | | | |
| 507 | 5,3582 | 1,8949 | 3,0784 | 0,1837 | 0,0505 | 0,1665 | | | |
| 508 | 5,3756 | 1,8988 | 3,0818 | 0,1837 | 0,0299 | 0,1630 | | | |
| 509 | 5,3991 | 1,9026 | 3,0851 | 0,1837 | 0,0293 | 0,1596 | | | |
| 510 | 5,4105 | 1,9063 | 3,0883 | 0,1837 | 0,0287 | 0,1562 | | | |
| 511 | 5,4280 | 1,9100 | 3,0913 | 0,1837 | 0,0280 | 0,1528 | | | |
| 311°27'28" | 5,4360 | 1,9116 | 3,0927 | 0,1837 | 0,0276 | 0,1500 | 0,00 | - 3,24 | 0,00 |
| 512 | 5,4454 | 1,9135 | 3,0943 | 0,1838 | 0,0274 | 0,1494 | | | |
| 513 | 5,4629 | 1,9171 | 3,0971 | 0,1839 | 0,0268 | 0,1460 | | | |
| 514 | 5,4803 | 1,9205 | 3,0998 | 0,1840 | 0,0262 | 0,1426 | | | |
| 515 | 5,4978 | 1,9239 | 3,1024 | 0,1841 | 0,0256 | 0,1392 | | | |
| 516 | 5,5150 | 1,9272 | 3,1050 | 0,1842 | 0,0250 | 0,1358 | | | |
| 517 | 5,5327 | 1,9304 | 3,1075 | 0,1844 | 0,0244 | 0,1324 | | | |
| 518 | 5,5501 | 1,9336 | 3,1096 | 0,1846 | 0,0238 | 0,1291 | | | |
| 519 | 5,5676 | 1,9367 | 3,1118 | 0,1848 | 0,0232 | 0,1258 | | | |
| 520 | 5,5851 | 1,9397 | 3,1139 | 0,1850 | 0,0227 | 0,1225 | + 1,15 | - 3,17 | - 0,36 |
| 521 | 5,6025 | 1,9426 | 3,1159 | 0,1852 | 0,0221 | 0,1192 | | | |
| 522 | 5,6200 | 1,9455 | 3,1178 | 0,1854 | 0,0215 | 0,1159 | | | |
| 523 | 5,6374 | 1,9483 | 3,1196 | 0,1856 | 0,0209 | 0,1127 | | | |
| 524 | 5,6549 | 1,9511 | 3,1215 | 0,1859 | 0,0203 | 0,1095 | | | |
| 525 | 5,6723 | 1,9537 | 3,1230 | 0,1862 | 0,0198 | 0,1063 | | | |
| 526 | 5,6898 | 1,9563 | 3,1245 | 0,1865 | 0,0192 | 0,1030 | | | |

| Ledningens Fyldningsgrad θ | Den rectificerede Bue $\theta = F(u)$ | Vandstrømmens Dybde $u = 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | Strømmens Areal $f(u) = \left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)$ | $\varphi = \frac{\theta}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\psi = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta - \sin\theta}{2}\right)^3}$ | $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ | $\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2 = f(u) - 3\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\frac{d\psi}{du} \cdot M^2 = f(u) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \div 6 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | $\left(\frac{d\varphi}{du}\right) \left(\frac{d\psi}{du}\right)$ |
|--------------------------------------|--|--|--|---|---|--|--|--|--|
| 527° | 5,7072 | 1,9588 | 3,1259 | 0,1868 | 0,0186 | 0,0997 | | | |
| 528 | 5,7247 | 1,9613 | 3,1273 | 0,1871 | 0,0180 | 0,0964 | | | |
| 529 | 5,7421 | 1,9636 | 3,1286 | 0,1875 | 0,0174 | 0,0932 | | | |
| 530 | 5,7596 | 1,9659 | 3,1298 | 0,1879 | 0,0169 | 0,0900 | + 1,97 | - 3,14 | - 0,62 |
| 531 | 5,7770 | 1,9681 | 3,1509 | 0,1882 | 0,0163 | 0,0868 | | | |
| 532 | 5,7945 | 1,9703 | 3,1520 | 0,1886 | 0,0157 | 0,0836 | | | |
| 533 | 5,8119 | 1,9724 | 3,1530 | 0,1890 | 0,0151 | 0,0805 | | | |
| 534 | 5,8294 | 1,9744 | 3,1539 | 0,1894 | 0,0146 | 0,0774 | | | |
| 535 | 5,8469 | 1,9763 | 3,1547 | 0,1898 | 0,0141 | 0,0743 | | | |
| 536 | 5,8643 | 1,9781 | 3,1555 | 0,1902 | 0,0135 | 0,0712 | | | |
| 537 | 5,8818 | 1,9799 | 3,1362 | 0,1906 | 0,0129 | 0,0681 | + 2,31 | - 3,12 | - 0,74 |
| 538 | 5,8992 | 1,9816 | 3,1369 | 0,1910 | 0,0123 | 0,0650 | | (Minimum) | |
| 539 | 5,9167 | 1,9833 | 3,1375 | 0,1915 | 0,0118 | 0,0619 | | | |
| 540 | 5,9341 | 1,9848 | 3,1381 | 0,1920 | 0,0113 | 0,0588 | + 2,60 | - 3,12 | - 0,83 |
| 541 | 5,9516 | 1,9863 | 3,1386 | 0,1925 | 0,0107 | 0,0557 | | | |
| 542 | 5,9690 | 1,9877 | 3,1390 | 0,1930 | 0,0101 | 0,0527 | | | |
| 543 | 5,9865 | 1,9890 | 3,1394 | 0,1935 | 0,0095 | 0,0497 | | | |
| 544 | 6,0059 | 1,9903 | 3,1398 | 0,1940 | 0,0090 | 0,0467 | | | |
| 545 | 6,0214 | 1,9914 | 3,1401 | 0,1945 | 0,0085 | 0,0437 | | | |
| 546 | 6,0388 | 1,9925 | 3,1404 | 0,1950 | 0,0079 | 0,0407 | | | |
| 547 | 6,0565 | 1,9936 | 3,1406 | 0,1955 | 0,0073 | 0,0377 | | | |
| 548 | 6,0737 | 1,9945 | 3,1408 | 0,1960 | 0,0067 | 0,0348 | | | |
| 549 | 6,0912 | 1,9955 | 3,1410 | 0,1965 | 0,0062 | 0,0319 | | | |
| 550 | 6,1087 | 1,9962 | 3,1412 | 0,1971 | 0,0057 | 0,0289 | + 3,00 | - 3,13 | - 0,96 |
| 551 | 6,1261 | 1,9969 | 3,1413 | 0,1976 | 0,0051 | 0,0260 | | | |
| 552 | 6,1436 | 1,9976 | 3,1414 | 0,1981 | 0,0045 | 0,0231 | | | |
| 553 | 6,1610 | 1,9981 | 3,1414 | 0,1986 | 0,0039 | 0,0202 | | | |
| 554 | 6,1785 | 1,9986 | 3,1415 | 0,1992 | 0,0033 | 0,0173 | | | |
| 555 | 6,1959 | 1,9990 | 3,1415 | 0,1998 | 0,0028 | 0,0144 | | | |
| 556 | 6,2134 | 1,9994 | 3,1416 | 0,2003 | 0,0022 | 0,0115 | | | |
| 557 | 6,2308 | 1,9997 | 3,1416 | 0,2008 | 0,0016 | 0,0086 | | | |
| 558 | 6,2488 | 1,9998 | 3,1416 | 0,2014 | 0,0010 | 0,0057 | | | |
| 559 | 6,2657 | 1,9999 | 3,1416 | 0,2020 | 0,0005 | 0,0028 | | | |
| 560 | 6,2832 | 2,0000 | 3,1416 | 0,2026 | 0,0000 | 0,0000 | + 3,14 | - 3,14 | - 1,00 |

Ved at betragte foranstaaende Tabel 6 vil man see, at Functionen φ er et Minimum for $\theta = 311^\circ 27' 28''$, at den er aftagende fra ∞ til 0,1837, naar θ voxer fra 0 til $311^\circ 27' 28''$, og voxer fra 0,1837 til 0,2026, naar θ voxer fra $311^\circ 27' 28''$ til 360° ; at der altsaa til enhver Værdi af φ , beliggende mellem 0,1837 og 0,2026, svarer 2de Fyldningsgrader, den ene beliggende mellem $311^\circ 27' 28''$ og 360° , den anden beliggende imellem 270° og $311^\circ 27' 28''$. Saavel Functionen ψ som Forholdet $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ ere derimod bestandigt aftagende fra $\theta = 0$ til $\theta = 360^\circ$, den Første fra ∞ til Nul, den Anden fra 1 til Nul.

Angaaende Functionerne $\left(\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2\right)$, $\left(\frac{d\psi}{du} M^2\right)$ og $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ skal her blot bemærkes

Følgende: at $\left(\frac{d\varphi}{du} \cdot M^2\right)$ voxer negativt fra Nul til $-8,242$, naar θ voxer fra Nul til 202° , men aftager derpaa negativt til Nul for θ voxende til $311^\circ 27' 28''$; fra $\theta = 311^\circ 27' 28''$ til $\theta = 360^\circ$ voxer den positivt fra Nul til π . Fremdeles bemærke vi, at $\left(\frac{d\psi}{du} M^2\right)$ er bestandig negativ fra $\theta = 0$ til $\theta = 360^\circ$; voxende fra Nul til $\div 6,09$ for θ voxende fra Nul til 193° , men derpaa aftager den igjen til $\div 3,12$, naar θ voxer videre indtil 337° ; fra dette Punkt er $\left(\frac{d\psi}{du} M^2\right)$ atter voxende indtil π for θ voxende til 360° .

Som en Følge heraf er $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ positiv, voxende fra 1 til 1,38, naar θ voxer fra 0 til 220° , hvorimod den senere er aftagende til -1 , naar θ voxer videre indtil 360° . Den er Nul for $\theta = 311^\circ 27' 28''$.

Jeg skal herved gjøre den Bemærkning, at φ er den samme Function, som jeg, i min tidligere Afhandling over Lovene for Vandets Bevægelse i lukkede Ledninger, har fremstillet ved $\left[\frac{c}{s^3}\right]$, idet c betegner den beskyllede Contour og s betegner Strømmens Areal for Radius = 1. Paa Grund heraf maa den i nævnte Afhandling under Tab. IV fremstillede Række af Værdier for $\left[\frac{s^3}{c}\right]$ falde sammen med de tilsvarende Værdier af $\frac{1}{\varphi}$. Ved en Sammenligning vil man vistnok finde smaa Afvigelser, der hidrøre fra, at de i bemeldte Tabel angivne Værdier kun tilnærmelsesviis ere rigtige, skjøndt de for det der tilsigtede Øiemed i Reglen ere tilstrækkeligt nøiagtige.

I det Følgende ville vi nu, gaaende ud fra den almindeligt gjældende Formel (31), undersøge og classificere de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne fremtræde i cirkel-

formige, cylindriske Ledninger, og det sees da først, at de forskjellige Vandspeilsformer alene afhænge af de constante Størrelser φ_p og ψ_m , som indgaae i Ligningen (31) og ere at betragte som givne Størrelser. Paa Grund heraf vil det være naturligt at dele Problemet i Classer efter Størrelsen af Constanterne φ_p , ψ_p , φ_m og ψ_m , eller rettere efter de Forhold, hvori disse staae til hinanden, idet φ_p og ψ_p betegne Værdierne af φ og ψ svarende til Parallelstrømmen, og φ_m og ψ_m betegne Værdierne af φ og ψ svarende til Ledningens Munding, for hvilken λ er et Maximum eller et Minimum. Med Hensyn til det indbyrdes Forhold, hvori disse Størrelser kunne staae til hinanden, bemærkes, at enten er $\varphi_p > \psi_m$ eller ogsaa er $\psi_m > \varphi_p$; men i ethvert af disse Tilfælde have vi da fremdeles enten $\psi_m > \psi_p$ eller $\psi_p > \psi_m$, naar vi derunder tillige tænke os Tilfældene $\varphi_p = \psi_m$ og $\psi_m = \psi_p$ indbefattede som Grændsen for Uligestorheden. I Henhold hertil bliver det altsaa klart, at vi kunne dele Problemet om de frie Vandspeilsformer i følgende 3de Classer af Tilfælde:

- I. De Tilfælde, hvori $\varphi_p > \psi_m > \psi_p$
- II. — — — $\varphi_p > \psi_p > \psi_m$
- III. — — — $\psi_m > \varphi_p > \psi_p$.

Den 4de mulige Combination ($\psi_p > \psi_m > \varphi_p$) bortfalder naturligviis eftersom vi stedse have $\varphi_p > \psi_p$, og de trede Classer af Tilfælde ere altsaa de eneste mulige.

Før vi gaae ind paa Undersøgelsen af de forskjellige Vandspeilsformer, som svare til enhver af disse tre Classer af Tilfælde, ville vi bemærke, at ifølge Formlerne (26) og (27) haves i Almindelighed for en hvilkenksomhelst Ledning

$$\operatorname{tg} \omega = g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_m} \dots \dots \dots (107)$$

og deraf see vi, at naar $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$, saa er $\varphi_p = \psi_m$. Men naar $\varphi_p = \psi_m$, og vi ikke tillige have $\varphi = \varphi_p$, saa viser Formlen (31), $\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha$, hvoraf følger

$$U = g\alpha \cdot \lambda + C,$$

idet C er en arbitrær Constant, og deraf seer man, at Strømmens Vandspeil er horizontalt.

Er derimod tillige $\varphi = \varphi_p$, saa finde vi ifølge (31)

$$\frac{dU}{d\lambda} = 0,$$

hvis sande Værdi aabenbart er Nul, efterdi Ledningens Fyldningsgrad er constant i dette Tilfælde, og Vandspeilet selvfølgelig har samme Fald som Ledningen, hvis Fald er bestemt ved Formlen $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$.

Naar $\operatorname{tg} \omega = g\alpha$, saa er Vandspeilet altsaa enten horizontalt eller ogsaa heelt igjennem parallelt med Ledningens Bund, og man seer, at dette Forhold finder Sted uaf-

hængigt af Ledningens Tværnsnitsform. Dette Resultat stemmer altsaa ganske med hvad vi tidligere have fundet i det specielle Tilfælde, hvor Ledningens Tværnsnit var en Rectangel.

Betragte vi nu den Classe af Tilfælde, som henhører under Betingelsen

$$I. \dots \varphi_p > \psi_m > \psi_p,$$

saa bemærkes først, at for alle de Vandspeilsformer, som svare til denne Betingelse, er Ledningens Fald bestemt ved Formlen (107); men da vi ifølge Betingelsen have

$$\frac{\varphi_p}{\psi_m} < \frac{\varphi_p}{\psi_p}$$

saa er det klart, at de til Classen I hørende Vandspeilsformer ikkun da kunne danne sig i Ledningen, naar dennes Fald er saaledes, at

$$g\alpha < \text{tg } \omega < \frac{\varphi_p}{\psi_p} \cdot g\alpha \dots \dots \dots (108)$$

Af denne Betingelse fremgaaer, at da $\left(\frac{\varphi_p}{\psi_p}\right)$, ifølge Tabel 6, voxer fra 1 i det Uendelige, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad, som vi ville betegne ved θ_p , voxer fra Nul til 360° , saa ville ogsaa de omhandlede Vandspeilsformer kunne fremtræde ved et desto større Fald af Ledningen, jo større Parallelstrømmens Fyldningsgrad θ_p er. Ved Undersøgelserne over de Former, som henhøre under Classen I, vil det være hensigtsmæssigt at skjelne mellem:

- I. A., hvori vi antage $\theta_p < 270^\circ$ og
 I. B., — — — $\theta_p > 270^\circ$.

I det første af disse Tilfælde ligger $\left(\frac{\varphi_p}{\psi_p}\right)$ mellem 1 og 3,33 og i det andet Tilfælde ligger dette Forhold mellem 3,33 og ∞ , og de Vandspeilsformer, som henhøre under Classen I. A., kunne altsaa kun danne sig, naar

$$g\alpha < \text{tg } \omega < (1 \text{ à } 3,33) g\alpha \dots \dots \dots (108. A)$$

de, som henhøre under Classen I. B., naar

$$g\alpha < \text{tg } \omega < (3,33 \text{ à } \infty) g\alpha \dots \dots \dots (108. B)$$

Lad os nu antage, at Ledningen har en saadan Beliggenhed og en saadan Fyldningsgrad, at Betingelsen I. A. er tilfredsstillet, saa vil der, ifølge Tabel 6, svare $\varphi < \varphi_p$ til enhver Fyldningsgrad $\theta > \theta_p$, og $\varphi > \varphi_p$ til enhver Fyldningsgrad $\theta < \theta_p$. Men da vi endvidere ifølge Betingelsen have $\psi_m > \psi_p$, saa er det indlysende, ifølge (31), at $\frac{dU}{d\lambda}$ er

- positiv fra $\psi = 0$ til $\psi = \psi_p$
 negativ - $\psi = \psi_p$ til $\psi = \psi_m$ og atter
 positiv - $\psi = \psi_m$ til $\psi = \infty$.

Paa Grund heraf vil det være hensigtsmæssigt at skjelne mellem følgende trede Tilfælde:

- I. A. a., hvori vi antage $0 < \psi < \psi_p$
 I. A. b., — — $\psi_p < \psi < \psi_m$ og
 I. A. c., — — $\psi_m < \psi < \infty$.

Naar Tilfældet I. A. a. er forhaanden, saa er det indlysende, at Vandspeilet er i Stigning over Ledningens Bund i positiv Retning, det vil sige i Retning mod Ledningens Udløb, fra Fyldningsgraden $\theta = \theta_p$ til $\theta = 360^\circ$. ψ er følgelig aftagende fra $\psi = \psi_p$ til $\psi = 0$ og $\frac{dU}{d\lambda}$ er voxende fra Nul til $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,2026}{\psi_m}$. Af Formlen (36) følger fremdeles,

at da $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv, og da Forholdet $\frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ ligeledes er positivt for alle Fyldningsgrader

fra $\theta = 0$ til $\theta = 311^\circ 27' 28''$ og 360° , men negativt for alle Fyldningsgrader, der ere beliggende mellem $311^\circ 27' 28''$ og 360° , saa kan Vandspeilet kun have et Inflexionspunkt i Intervallet θ_p til $311^\circ 27' 28''$, og for at afgjøre, om et saadant Punkt virkelig forekommer her, bemærke vi, at medens θ voxer fra θ_p til $311^\circ 27' 28''$, saa voxer $\frac{dU}{d\lambda}$ fra Nul til $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,1837}{\psi_m - 0,0276}$, hvor-

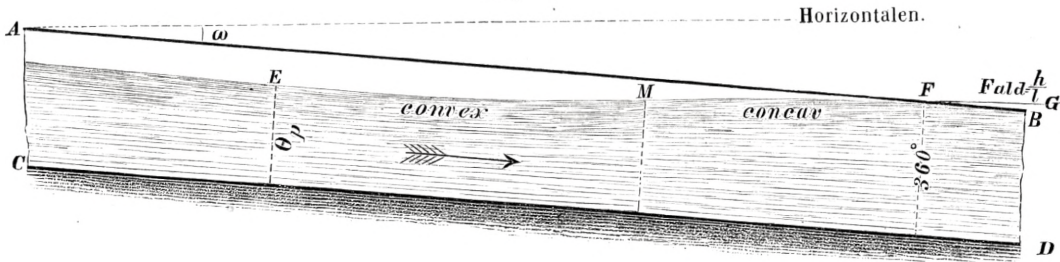
imod $g\alpha \cdot \frac{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)}{\left(\frac{d\psi}{du}\right)}$ aftager fra en vis positiv Værdi indtil Nul, og følgelig gives der et

Punkt, for hvilket begge Udtryk ere ligestore, og Vandspeilet har altsaa et Inflexionspunkt ved en Fyldningsgrad, der ligger mellem θ_p og $311^\circ 27' 28''$. Mærke vi os derhos, at ifølge Formlen (32), sammenholdt med Tab. 6, er T positiv, naar θ kun er meget lidt større end θ_p , saa sees det let ifølge (34), at da $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv, saa er $\frac{d^2 U}{d\lambda^2}$ ogsaa positiv i den umiddelbare Nærhed af Parallelstrømmens Vandspeil, hvoraf kan slutes, at det søgte Vandspeil er convext imod Ledningens Bund fra $\theta = \theta_p$ til Inflexionspunktet, men derimod concavt imod Bunden fra Inflexionspunktet indtil $\theta = 360^\circ$.

Med Hensyn paa Vandspeilets Krumningsradius γ , da bemærkes, at denne ifølge (35) er uendelig stor baade for $\theta = \theta_p$ og for Inflexionspunktet; imellem disse Grændser er den derimod endelig, men negativ; fra Inflexionspunktet indtil en Fyldningsgrad af 360 er γ positiv, aftagende fra ∞ til Nul.

Af det saaledes Udviklede vil det være klart, at den søgte Vandspeilsform, som svarer til Betingelsen I. A. a., kan fremstilles ved Linien EMF , som angivet i den efterfølgende Fig. 12, hvor $ABCD$ betegner den givne Ledning, som danner en Vinkel ω med Horizontalen.

Fig. 12.



Det bemærkes først, at i Punktet F af ovenstaaende Vandspeilsform Fig. 12, hvor Ledningens Fyldningsgrad $\theta = 360^\circ$, danner Tangenten til Vandspeilet en Vinkel med Ledningens Bund, hvis Tangens $= \frac{dU}{d\lambda} = g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,2026}{\psi_m}$. Men vi bemærke derhos, at, naar vi tænke os den givne Ledning at være saaledes overfyldt, at Vandstrømmen bevæger sig under et Tryk i Ledningen og under et Tab i Vandreisning $= h$ paa Længden l , saa vil Faldet af den rette Linie, som fremstiller Vandreisningen for alle Punkter af den betragtede Ledning, ifølge Formel (25) i min tidligere Afhandling over lukkede Ledningers Vandføring, kunne fremstilles ved

$$\frac{h}{l} = 0,2026 \cdot \alpha \frac{q^2}{\delta^5} \dots \dots \dots (109)$$

idet vi bibeholde de i nærværende Afhandling indførte Betegnelser. Søge vi nu Vandspeilets Fald i det betragtede Punkt F , Fig. 12, med Hensyn paa Længden af Ledningen — overensstemmende med Forholdet $\frac{h}{l}$, Formel (109) —, saa finde vi dette Fald, ifølge Formlen (6), udtrykt ved

$$\frac{dy}{d\lambda} = \cos \omega \left(\operatorname{tg} \omega - \frac{dU}{d\lambda} \right) \dots \dots \dots (110)$$

og indsætte vi heri den ovenfor angivne Værdi for $\frac{dU}{d\lambda}$ samt Værdierne for φ_p og ψ_m , ifølge (26) og (27), saa finde vi

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{h}{l},$$

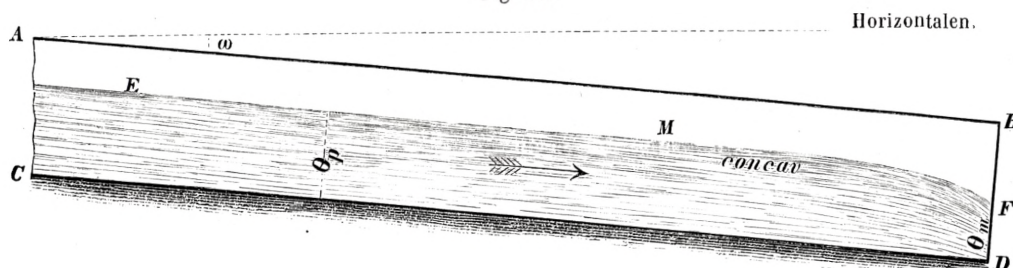
hvoraf følger, at $\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)$ er positiv ligefra $\theta = \theta_p$ til $\theta = 360^\circ$, altsaa at Vandspeilet i hele Intervallet har Fald i Strømmens Retning, og at Tangenten til Vandspeilet i Punktet F netop fremstiller Vandreisningen i den nedenfor F beliggende overfyldte Deel af Ledningen.

Med Hensyn til de Forhold, hvorunder Betingelsen I. A. a. er tilfredsstillet, og hvorunder Vandspeilsformen Fig. 12 vil danne sig, bemærkes, at dette vil finde Sted naar Ledningens øvre Deel gjenneumløbes af en Parallelstrøm indtil et vist Punkt, hvorfra

Strømmen holdes opstemmet i Ledningen, f. Ex. derved, at Ledningens Udløb er dykket i et Afløbsbassin; men Formen bliver først fuldstændig, som angivet i Fig. 12, naar Ledningens Udløb er fuldstændig dykket under Vandspeilet i Afløbsbassinet.

Antage vi dernæst Tilfældet I. A. b. at være forhaanden, saa er det klart, at Vandspeilet sænker sig imod Ledningens Bund i positiv Retning, fra Fyldningsgraden θ_p til den Fyldningsgrad, som svarer til $\psi = \psi_m$, hvilken vi i Almindelighed ville betegne ved θ_m , samt at ψ er voxende fra $\psi = \psi_p$ til $\psi = \psi_m$. $\frac{dU}{d\lambda}$ voxer derimod negativt fra Nul til $-\infty$, og da høire Side af Formlen (36) bestandig er positiv i hele Intervallet, fra θ_p til θ_m , saa er det klart, at der ikke gives noget Punkt i det søgte Vandspeil, for hvilket (36) kan tilfredsstilles, og at Vandspeilet selvfølgelig ikke har noget Inflexionspunkt. For Værdier af θ , der ligge meget nær ved θ_p , seer man dernæst let, at T , Formel (32), er positiv, og deraf fremgaaer, at T er positiv for hele Intervallet, θ_p til θ_m ; men da $\frac{dU}{d\lambda}$ er negativ, er det tydeligt ifølge (34), at $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ, og at Vandspeilet heelt igjennem er concavt imod Ledningens Bund. Angaaende Vandspeilets Krumningsradius γ , da bemærke vi ifølge (35), at denne bestandig er positivt aftagende, fra $+\infty$ til $+\delta \cdot g \alpha \cdot \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$, naar θ aftager fra θ_p til θ_m , og $\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m$ betegner Værdien af $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ for $\theta = \theta_m$.

Fig. 13.

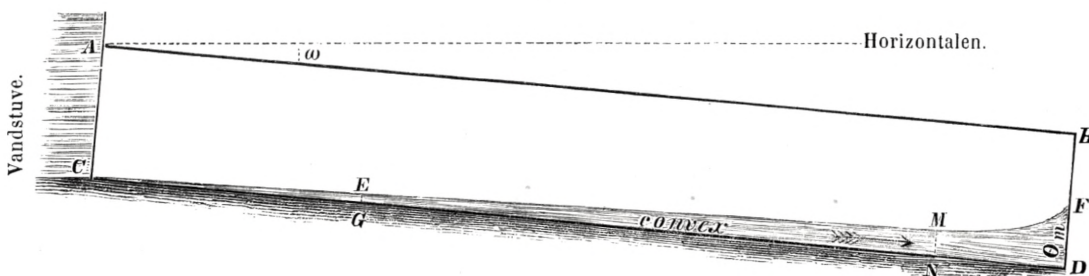


I Henhold til det her Udviklede er det indlysende, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen I. A. b. kan fremstilles ved Linien EMF i ovenstaaende Fig. 13, idet $ABCD$ betegner Ledningen, som danner Vinklen ω med Horizontalen. Med Hensyn til de Forhold, under hvilke Betingelsen I. A. b. er tilfredsstillet, bemærkes, at denne Vandspeilsform danner sig under ganske samme Betingelser som Vandspeilsformen Fig. 12, naar Strømmen ikke er opstemmet ved Ledningens Udløb, men har frit Afløb.

Forudsætte vi dernæst, at Forholdene tilfredsstillende Betingelsen I. A. c., saa see vi først, at Vandspeilet er i Stigning med Hensyn til Ledningens Bund i Retning mod Ledningens Udløb fra Fyldningsgraden $\theta = 0$ til $\theta = \theta_m$, hvorhos $\frac{dU}{d\lambda}$ er voxende fra $g\alpha$ til $+\infty$. Høire Side af Ligningen (36) voxer derimod samtidigt fra $g\alpha$ til en Størrelse, der i det Høieste er $= 1,38 \cdot g\alpha$, og deraf fremgaaer, at Betingelsen (36) ikkun er tilfredsstillet for $\theta = 0$. Vandspeilet har altsaa intet Inflexionspunkt, men den Omstændighed, at (36) er tilfredsstillet for $\theta = 0$, viser, at her nærmer Vandspeilet sig en plan Flade. Lægge vi dernæst Mærke til, at ifølge Formlen (32) er T positiv for alle Fyldningsgrader, der ligge meget nær ved θ_m , saa bliver det klart, at T er positiv lige fra $\theta = 0$ til $\theta = \theta_m$, og da $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er positiv, saa er følgelig $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ positiv, og altsaa Vandspeilet convext imod Ledningens Bund for hele Intervallet. Med Hensyn til Krumningsradius bemærkes ifølge (35), at den er negativt aftagende fra $-\infty$ til $-\delta \cdot g\alpha \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$, naar θ voxer fra Nul til θ_m og, med Abstraction fra Fortegnet, ligger γ altsaa nøiagtig mellem samme Grændser som i Tilfældet I. A. b.

Af det saaledes Udviklede fremgaaer, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen I. A. c., kan fremstilles ved Linien $CEMF$ i efterfølgende Fig. 14, idet $ABCD$ betegner Ledningen, som danner Vinklen ω med Horizontalen.

Fig. 14.



Med Hensyn til de Forhold, hvorunder Vandspeilsformen Fig. 14 danner sig, da see vi, at den fuldstændige Form kun kan bestaae, naar Vandets Indstrømningshastighed er uendelig stor og Ledningens Længde netop er saadan, at $\theta = \theta_m$ svarer til Ledningens Munding. Har Ledningen en større Længde, saa vil ganske vist den omhandlede Vandspeilsform fremtræde i det første Øieblik, naar Stigbordet for Indløbet trækkes; men Formen vil da ikke kunne holde sig, og den vil navnlig fortrænges af Formen Fig. 13, hvis Ledningen har frit Afløb, men af Formen Fig. 12, hvis Afløbet er dykket. Kommer

Vandstrømmen ind igjennem Stigbordsaabningen EG , og har Ledningen derhos kun Længden GN , saa vil Vandspeilsformen EM være uforandret den samme, som under Tilstedeværelsen af den fuldstændige Form, forudsat at Vandføringen er uforandret, idet hele Forskjellen bliver den, at de to afskaarne Stykker CGE og $MNDF$ bortfalde.

Efter saaledes at have fremstillet de tre Vandspeilsformer Fig. 12, 13 og 14, der svare til Betingelsen I. A., og som forøvrigt ere overensstemmende med de tidligere fremstillede 3de Vandspeilsformer, Fig. 6 paa Plan II og Fig. 2 og 3 paa Plan I, der fremtræde i rektangulære Ledninger, ville vi gaae over til at undersøge de forskjellige Vandspeilsformer, som svare til Betingelsen:

$$\text{I. B. . . . } \varphi_p > \psi_m > \psi_p; \theta_p > 270^\circ.$$

Betragte vi Tabel 6, og erindre vi derhos, at φ er et Minimum for $\theta = 311^\circ 27' 28''$, saa vil det blive indlysende, at, naar θ_p er mindre end $311^\circ 27' 28''$, saa gives der en anden og større Fyldningsgrad, $\theta_{\bar{w}} > 311^\circ 27' 28''$, for hvilken den tilsvarende Værdi $\varphi_{\bar{w}} = \varphi_p$; men deraf følger atter, at der til enhver Parallelstrøm, hvis Fyldningsgrad, θ_p , er mindre end $311^\circ 27' 28''$, svarer en anden Parallelstrøm, der har samme Vandføring, men hvis Fyldningsgrad $\theta_{\bar{w}}$ er større end $311^\circ 27' 28''$. Fremdeles vil det blive indlysende, at der til enhver Fyldningsgrad θ , beliggende mellem Grændserne θ_p og $\theta_{\bar{w}}$, svarer en Værdi af φ , som er mindre end $\varphi_p = \varphi_{\bar{w}}$, samt at der til enhver Fyldningsgrad θ , som ligger udenfor Grændserne θ_p og $\theta_{\bar{w}}$, svarer en Værdi af φ , som er større end $\varphi_p = \varphi_{\bar{w}}$. Naar vi nu i det Følgende betegne Parallelstrømmens Fyldningsgrad, hvis denne er mindre end $311^\circ 27' 28''$, ved θ_p , og hvis den er større end $311^\circ 27' 28''$, ved $\theta_{\bar{w}}$, saa finde vi let ifølge (31), at under den givne Betingelse I. B. er:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} & \text{ negativ fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_{\bar{w}} \\ & \text{— positiv - } \psi = \psi_{\bar{w}} - \psi = \psi_p \\ & \text{— negativ - } \psi = \psi_p - \psi = \psi_m \text{ og} \\ & \text{— positiv - } \psi = \psi_m - \psi = \infty \end{aligned}$$

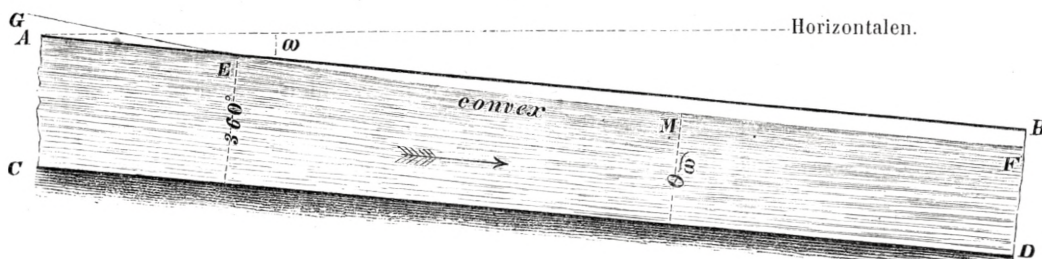
og det vil derfor være beqvemt at dele hele Undersøgelsen over de Vandspeilsformer, som kunne fremtræde under Betingelsen I. B., i en Undersøgelse af de Former, som svare til følgende 4 Tilfælde:

$$\begin{aligned} \text{I. B. a.} & \text{ det Tilfælde, hvori } 0 < \psi < \psi_{\bar{w}} \\ \text{I. B. b.} & \text{ - } \text{—} \text{—} \psi_{\bar{w}} < \psi < \psi_p \\ \text{I. B. c.} & \text{ - } \text{—} \text{—} \psi_p < \psi < \psi_m \\ \text{I. B. d.} & \text{ - } \text{—} \text{—} \psi_m < \psi < \infty. \end{aligned}$$

Antage vi Tilfældet I. B. a. at være forhaanden, saa er det indlysende, at $\frac{dU}{d\lambda}$ er negativ, og at Strømmens Vandspeil sænker sig imod Ledningens Bund i positiv Retning af Ledningen fra Fyldningsgraden $\theta = 360^\circ$ til $\theta = \theta_{\omega}$, ved hvilken Fyldningsgrad Strømmens Vandspeil flyder parallelt med Bunden af Ledningen. ψ er altsaa voxende fra Nul til ψ_{ω} i det betragtede Interval. Med Hensyn til Spørgsmaalet, om den søgte Vandspeilsform har noget Inflexionspunkt, bemærkes, at $\frac{dU}{d\lambda}$ er negativt aftagende fra $\div g\alpha \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$ til Nul, naar θ aftager fra 360° til θ_{ω} , og at høire Side af Betingelsesligningen (36) samtidigt er negativt aftagende fra $\div g\alpha$ til $\div \varepsilon \cdot g\alpha$, ifølge Tabel 6, naar vi ved ε betegne en ægte Brøk; men af Tabel 6 viser det sig dernæst let, at $\frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m} < 1$, og deraf bliver det altsaa klart, at der ikke gives noget Punkt af det søgte Vandspeil, for hvilket (36) kan blive tilfredsstillet, og at Vandspeilet altsaa heller ikke har noget Inflexionspunkt. Bemærk vi derhos, at for Fyldningsgrader, der ligge meget nær ved θ_{ω} , er T negativ, saa er det indlysende, at T er negativ i hele Intervallet fra $\theta = 360^\circ$ til $\theta = \theta_{\omega}$, og da derhos $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ ogsaa er negativ, saa maa $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$, Formel (34), være positiv, og altsaa Vandspeilet være convex imod Ledningens Bund i hele Intervallet. Endelig med Hensyn til Krumningsradius γ bemærkes, ifølge (35), at denne er negativt voxende fra $\gamma = 0$ til $\gamma = -\infty$, naar θ aftager fra 360° til θ_{ω} .

Af det saaledes Udviklede fremgaaer, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen I. B. a., kan fremstilles ved Linien EMF i efterfølgende Fig. 15, hvor $ABCD$ betegner Ledningen, der danner Vinklen ω med Horizontalen.

Fig. 15.



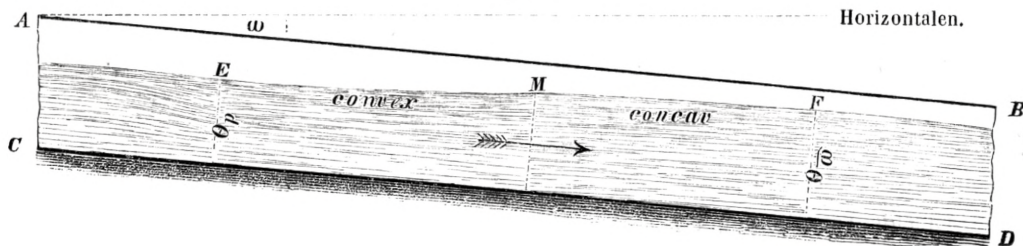
Vi have nys seet, at Tangenten til Punktet E af den betragtede Vandspeilsform EMF danner en Vinkel med Ledningens Bund, hvis Tangens er $\frac{dU}{d\lambda} = -g\alpha \cdot \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$;

indsætte vi denne Værdi i Formlen (110) samt Værdierne for φ_p og ψ_m , ifølge Formlerne (26) og (27), saa finde vi Vandspeilets virkelige Fald i Punktet E fremstillet ved Formlen (109). Men deraf er det altsaa klart, at Vandspeilsformen Fig. 15 danner sig, naar Vandet strømmer ind i Ledningen under et Tryk, f. Ex. fra et Indløbsbassin, naar Ledningen har frit Afløb forneden, og det vil tillige være indlysende af det Udviklede, at Tangenten GE til Vandspeilet i Punktet E fremstiller Vandreisningen i den ovenfor E værende Deel af Ledningen, hvori Strømmen bevæger sig under et Tryk.

Antage vi dernæst, at Betingelsen I. B. b. er tilfredsstillet, saa see vi først, at Strømmens Vandspeil er i Stigning med Hensyn paa Ledningens Bund i den positive Retning fra Fyldningsgraden θ_p til $\theta = \theta_w$, imedens ψ er aftagende fra $\psi = \psi_p$ til $\psi = \psi_w$, og samtidigt hermed er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ først voxende fra Nul til en vis positiv Grændse, og derfra igjen aftagende til Nul. Af Tabel 6 viser det sig dernæst, at i Intervallet θ_p til θ_w er høire Side af Ligningen (36) positiv fra $\theta = \theta_p$ til $\theta = 311^\circ 27' 28''$, men negativ i Intervallet $311^\circ 27' 28''$ til θ_w , saa at der altsaa kun kan findes Inflexionspunkter i det førstnævnte Interval, eftersom venstre Side af Ligningen (36) stedse er positiv. For at afgjøre, om et saadant Punkt virkelig findes, bemærkes, at, medens venstre Side er Nul for $\theta = \theta_p$ og voxer til en vis positiv Værdi, naar θ voxer fra θ_p til $311^\circ 27' 28''$, saa er høire Side af (36) en positiv Størrelse for $\theta = \theta_p$, men Nul for $\theta = 311^\circ 27' 28''$, hvoraf nødvendigiis følger, at der mellem θ_p og $311^\circ 27' 28''$ findes en Fyldningsgrad, for hvilken (36) er tilfredsstillet, og at det søgte Vandspeil har et Inflexionspunkt, svarende til denne Fyldningsgrad. Fremdeles bemærkes ifølge (32), at T er positiv for Fyldningsgrader, der ligge meget nær ved θ_p , og at altsaa T er positiv fra θ_p til Inflexionspunktet, samt negativ fra dette til $\theta = \theta_w$, og da $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv, saa er det klart ifølge (34), at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er positiv fra θ_p til Inflexionspunktet, men negativt fra dette til $\theta = \theta_w$. Vandspeilet er altsaa convext imod Bunden af Ledningen i det førstnævnte Interval, men concavt i det andet. Med Hensyn til Vandspeilets Krumningsradius bemærkes, at γ er uendelig stor for $\theta = \theta_p$, for $\theta = \theta_w$ saavelsom for Inflexionspunktet, hvorimod den er endelig imellem disse Punkter, negativ mellem θ_p og Inflexionspunktet og positiv mellem dette Punkt og θ_w . For ethvert af disse Intervaller gives der altsaa et Punkt, for hvilket γ er et Minimum.

I Henhold til det saaledes Udviklede vil det være indlysende, at den søgte Vandspeilsform kan fremstilles ved Linien EMF i efterfølgende Fig. 16, hvor $ABCD$ betegner den givne Ledning.

Fig. 16.



Med Hensyn til de Forhold, hvorunder denne Form danner sig, da er det indlysende at den fremkommer, naar Ledningen gennemstrømmes af en Parallelstrøm, hvis Fyldningsgrad er beliggende mellem 270° og $311^\circ 27' 28''$, saafremt Strømmen ved nogen- somhelst Forhindring bliver standset i dens frie Flugt.

Antage vi derefter, at Forholdene ved Ledningen ere saadanne, at Betingelsen I. B. c. er tilfredsstillet, saa er det aabenbart, at da $\frac{dU}{d\lambda}$ er negativ, saa sænker Vandspeilet sig imod Ledningens Bund i positiv Retning fra Fyldningsgraden $\theta = \theta_p$ til $\theta = \theta_m$, og Functionen ψ voxer altsaa samtidigt fra ψ_p til ψ_m . Men naar θ aftager fra θ_p til θ_m , saa voxer $\frac{dU}{d\lambda}$ negativt fra Nul til $\div \infty$, og da høire Side af Betingelsesligningen (36) bestandig er positiv, saa er det klart, at det søgte Vandspeil ikke har noget Inflexionspunkt. Bemærke vi derhos, at T stedse er positiv, saa følger let, at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ i hele Intervallet, og deraf igjen, at Vandspeilet er concavt imod Bunden. Angaaende Krumningsradius bemærkes, at γ er uendelig stor for $\theta = \theta_p$, positiv i hele Intervallet, og at $\gamma = \delta \cdot g\alpha \cdot \frac{\Phi_m - \Phi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$ for $\theta = \theta_m$, kort sagt, det viser sig, at den søgte Vandspeilsform er nøiagtig den samme, som vi have fremstillet i Fig. 13, hvilket ogsaa umiddelbart kunde sees deraf, at Betingelserne ere ganske de samme i begge Tilfælde.

Sammenholde vi Betingelserne I. B. d. og I. A. c., saa viser det sig ligeledes let, at de falde sammen, og deraf følger, at Vandspeilsformen, svarende til Betingelsen I. B. d., er fremstillet ved Figur 14.

Efter saaledes at have fuldført Undersøgelsen over de Vandspeilsformer, som svare til Betingelsen I, kunne vi strax underkaste Betingelsen III en ganske tilsvarende Analyse, hvorved det let vil vise sig, at denne Betingelse nøiagtig fører til de samme Former, som Betingelsen I, der nys er behandlet.

Af Betingelsen III, d. v. s. $\psi_m > \varphi_p > \psi_p$, følger $\frac{\varphi_p}{\psi_m} < 1$, og deraf i Forbindelse med Formlen (106), at man i alle de Tilfælde, som henhøre under Betingelsen III, har

$$\operatorname{tg} \omega < g\alpha, \dots \dots \dots (111)$$

hvoraf fremgaaer, at alle de Vandspeilsformer, som vi nu skulle gaae over til at undersøge, danne sig ved Fald af Ledningen, som ere mindre end hvad der i den foregaaende Classe af Tilfælde var Minimum.

Antage vi først, at Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p < 270^\circ$, saa er det klart, at der til enhver Fyldningsgrad $\theta < \theta_p$ svarer $\varphi > \varphi_p$, samt at der til alle Fyldningsgrader $\theta > \theta_p$ svarer $\varphi < \varphi_p$; erindre vi derhos, at $\psi_m > \psi_p$, saa bliver det indlysende ifølge (31), at

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} & \text{ er positiv fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_p \\ & \text{--- - negativ - } \psi = \psi_p \text{ - } \psi = \psi_m \\ & \text{--- - positiv - } \psi = \psi_m \text{ - } \psi = \infty, \end{aligned}$$

og sammenholde vi disse Betingelser med de tidligere under I. A. a., I. A. b. og I. A. c. angivne, saa viser det sig, at de her omhandlede 3de Vandspeilsformer ere identiske med Figurerne 12, 13 og 14.

Antage vi derefter

$$270^\circ < \theta_p < 311^\circ 27' 28'',$$

$$\theta_{\bar{\omega}} > 311^\circ 27' 28'' \text{ samt } \varphi_{\bar{\omega}} = \varphi_p,$$

saa bliver det indlysende ifølge (31), idet $\psi_m > \psi_p$, at

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} & \text{ er negativ fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_{\bar{\omega}} \\ & \text{--- - positiv - } \psi = \psi_{\bar{\omega}} \text{ - } \psi = \psi_p \\ & \text{--- - negativ - } \psi = \psi_p \text{ - } \psi = \psi_m \text{ og} \\ & \text{--- - positiv - } \psi = \psi_m \text{ - } \psi = \infty. \end{aligned}$$

Men sammenholde vi disse Betingelser med de tidligere undersøgte 4 Betingelser, der ere angivne under I. B. a., I. B. b., I. B. c. og I. B. d., saa viser det sig, at de her omhandlede Vandspeilsformer ere identiske med de Former, som respective ere fremstillede ved Figurerne 15, 16, 13 og 14. Saaledes er det altsaa beviist, at Betingelsen III. ikke medfører andre nye Vandspeilsformer end dem, som svare til Betingelsen I.

Sammenstille vi de erhholdte Resultater, saa viser det sig, at der under Betingelserne

$$\text{I. . . } \varphi_p > \psi_m > \psi_p \text{ og III. . . } \psi_m > \varphi_p > \psi_p$$

kun kan fremtræde 5 forskellige Vandspeilsformer, og navnlig kun de Former, som ere angivne ved Figurerne 12, 13, 14, 15 og 16, og med Hensyn paa de Forhold ved Ledningen, hvorunder disse forskellige Vandspeilsformer vise sig, bemærke vi Følgende:

1. Vandspeilsformen Fig. 12 danner sig, naar Ledningen har et Fald, bestemt ved Formlen (107), der er mindre end $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$ og Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p < 270^\circ$, samt naar Afløbet er hemmet.
2. Vandspeilsformen Fig. 16 danner sig under ganske de samme Forhold, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p > 270^\circ$.
3. Vandspeilsformen Fig. 13 danner sig, naar Ledningens Fald, bestemt ved Formlen (107), er mindre end $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, idet Parallelstrømmens Fyldningsgrad θ_p er beliggende mellem 0° og $311^\circ 27' 28''$, og Afløbet er fuldkommen frit.
4. Vandspeilsformen Fig. 14 danner sig under de samme Fald af Ledningen og ved de samme Fyldningsgrader for Parallelstrømmen, som Formen Fig. 13, naar Vandet strømmer ind i Ledningen igjennem en Stigbordsaabning med en større Hastighed end den, som svarer til Parallelstrømmen. Har Ledningen en stor Længde, saa vil Formen kun bestaae i første Øieblik, men derpaa vil den blive fortrængt af een af de tre Former Fig. 12, 13 eller 16, alt efter Omstændighederne. Er Ledningens Længde derimod tilstrækkelig lille, saa vil Formen Fig. 14 vedligeholde sig.
5. Vandspeilsformen Fig. 15 danner sig under de samme Fald af Ledningen, hvorunder de nys omtalte Vandspeilsformer fremtræde, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p > 270^\circ$, og Ledningen delviis er saaledes overfyldt, at Vandet bevæger sig under et Tryk fra Indløbet nedad imod Udløbet.

Der staaer nu tilbage at bestemme de Vandspeilsformer, som svare til den sidste af de tre Classer af Tilfælde, hvori vi have seet, at det fuldstændige Problem lader sig dele, og navnlig til Betingelsen:

$$\text{II.} \dots \varphi_p > \psi_p > \psi_m.$$

I den Hensigt vil det være beqvemt at skjelne mellem

Tilfældet II. A., hvori $\theta_p < 270^\circ$, og

Tilfældet II. B., hvori $\theta_p > 270^\circ$.

Med Hensyn til Ledningens Fald bemærke vi Følgende: Af den givne Betingelse II. følger $\frac{\varphi_p}{\psi_m} > \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, og paa Grund heraf og i Henhold til Formlen (107), haves følgende Betingelse for Ledningens Fald i den omhandlede Classe af Tilfælde

$$\text{tg } \omega > g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p} \dots \dots \dots (112)$$

eller, ved at overføre denne Betingelse paa de to angivne Tilfælde, at de Vandspeilsformer, som svare til Betingelsen II. A., fordre, at

$$\operatorname{tg} \omega > (1 \text{ à } 3,33) g \alpha \dots\dots\dots (112. A.)$$

og at de Former, som svare til Betingelsen II. B. fordre, at

$$\operatorname{tg} \omega > (3,33 \text{ à } \infty) g \alpha \dots\dots\dots (112. B.)$$

Sammenligne vi Formlerne (108) og (112), saa viser det sig let, at medens Vandspeilsformerne, svarende til Betingelsen I., udkræve, at Ledningens Fald, bestemt ved $\operatorname{tg} \omega$, er mindre end $g \alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, saa fordrer Dannelsen af de Former, som svare til Betingelsen II., at

Ledningens Fald skal være større end $g \alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$.

Antage vi nu, at Ledningens Fald og Fyldningsgrad er saadan, at Betingelsen II. A. er tilfredsstillet, saa er det klart, at der til ethvert Punkt af Ledningen, hvis Fyldningsgrad $\theta < \theta_p$, svarer $\varphi > \varphi_p$, ligesom ogsaa $\varphi < \varphi_p$ for alle Punkter, hvis Fyldningsgrad $\theta > \theta_p$, og da vi tilmed, ifølge Betingelsen II, have $\psi_p > \psi_m$, saa er det indlysende, naar vi betragte Formlen (31), at

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} &\text{ er positiv fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_m \\ - &\text{ negativ - } \psi = \psi_m - \psi = \psi_p \text{ og atter} \\ - &\text{ positiv - } \psi = \psi_p - \psi = \infty. \end{aligned}$$

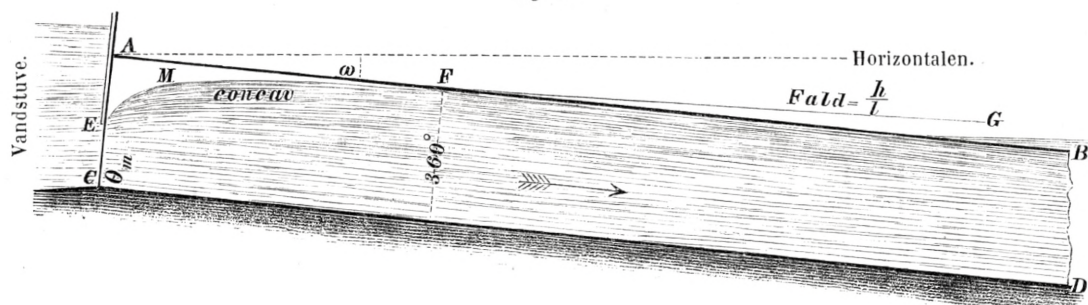
Paa Grund heraf vil det være hensigtsmæssigt at skjelne mellem følgende tre Tilfælde:

- II. A. a., hvor $0 < \psi < \psi_m$
- II. A. b., — $\psi_m < \psi < \psi_p$ og
- II. A. c., — $\psi_p < \psi < \infty$.

Er Tilfældet II. A. a. forhaanden, saa er Vandspeilet i Stigning i Ledningens positive Retning, fra $\theta = \theta_m$ til $\theta = 360^\circ$, ψ altsaa aftagende fra ψ_m til Nul, hvorimod $\frac{dU}{d\lambda}$ er aftagende fra ∞ til $g \alpha \frac{\varphi_p - 0,2026}{\psi_m}$. Ved dernæst at kaste et Blik paa Tab. 6 see vi, at høire Side af Ligningen (36) er negativ fra 360° til $311^\circ 27' 28''$, men positiv fra sidstnævnte Fyldningsgrad indtil $\theta = \theta_m$, og der kan altsaa kun være Spørgsmaal om Vandspeilet har noget Inflexionspunkt i Intervallet $311^\circ 27' 28''$ til θ_m . Det viser sig imidlertid let, at for $\theta = \theta_m$ er venstre Side af Betingelsesligningen (36) uendelig stor, og høire Side = $\varepsilon \cdot g \alpha$ (idet ε er et Tal, som er mindre end 1,38) samt at $\theta = 311^\circ 27' 28''$ gjør venstre Side af (36) = $g \alpha \frac{\varphi_p - 0,1837}{\psi_m - 0,0276}$, medens høire Side bliver Nul, og heraf fremgaaer, at der ikke gives noget Punkt af Vandspeilet, for hvilket (36) er tilfredsstillet; med andre Ord, Vandspeilet har intet Inflexionspunkt. En Betragtning af Formlen (32) viser dernæst, at T er

negativ for Værdier af θ , der ligge ganske nær ved θ_m , hvorefter altsaa kan sluttes, deels at Fyldningsgraden θ_m svarer til Indløbsaabningen, og deels, at $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ i hele det betragtede Interval, eller at Vandspeilet heelt og holdent er concav imod Ledningens Bund. Med Hensyn til Krumningsradius bemærkes, at γ er positiv voxende fra $\delta g\alpha \cdot \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$ til en vis Grændse, og derpaa aftagende til $\gamma = 0$, naar ψ aftager fra ψ_m til 0.

Fig. 17.

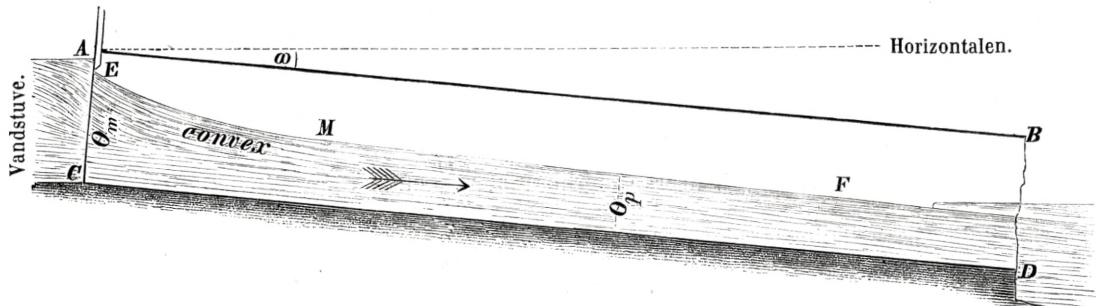


Af det saaledes Udviklede vil det være indlysende, at den søgte Vandspeilsform kan fremstilles ved Linien EMF i ovenstaaende Fig. 17, hvori $ABCD$ betegner den givne Ledning. Betragt vi Formlen (110) og bemærk derhos, at $\frac{dU}{d\lambda}$ aftager fra $+\infty$ til $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,2026}{\psi_m}$, naar Ledningens Fyldningsgrad voxer fra $\theta = \theta_m$ til $\theta = 360^\circ$, saa finde vi Vandspeilets absolute Fald i Punktet F , hvor Fyldningsgraden er 360° , at være fremstillet ved Formlen (109), og deraf fremgaaer altsaa, at Tangenten FG til Vandspeilet i Punktet F netop har det Fald, som Vandreisningen i den følgende Deel af Ledningen maa have for at Strømmen skal kunne bevæge sig videre igjennem Ledningen, og Linien $EMFG$ vil altsaa fremstille Vandreisningen for hele Ledningen. Men det viser sig tillige, at da $\frac{dU}{d\lambda}$ aftager fra ∞ til $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,2026}{\psi_m}$, saa er $\left(\frac{dy}{d\lambda}\right) = \cos \omega \left(\operatorname{tg} \omega - \frac{dU}{d\lambda}\right)$ negativ i den første Deel af Ledningen indtil $\frac{dU}{d\lambda} = \operatorname{tg} \omega = g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_m} = g\alpha \frac{\varphi_p - \varphi}{\psi_m - \psi}$, altsaa indtil $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_p}{\psi_m}$ og indtil dette Punkt er Vandspeilet altsaa stigende med Hensyn paa det horizontale Plan.

Antage vi derefter den næste Betingelse, nemlig II. A. b. at være tilfredsstillet, saa er Vandspeilet i Sænkning fra Fyldningsgraden $\theta = \theta_m$ til $\theta = \theta_p$, og følgelig ψ voxende fra ψ_m til ψ_p ,

hvorimod $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er aftagende fra $-\infty$ til Nul. Fremdeles see vi af Tab. 6, i Forbindelse med Formlen (36), at, skal Vandspeilet have et Inflexionspunkt, saa maa dette Punkt ligge i Intervallet $311^{\circ} 27' 28''$ à 360° Fyldning; men deraf følger umiddelbart, at naar θ_m er mindre end $311^{\circ} 27' 28''$, saa kan Vandspeilet ikke have noget Inflexionspunkt. Men er $\theta_m > 311^{\circ} 27' 28''$, saa vil høire Side af Betingelsesligningen (36) være Nul for $\theta = 311^{\circ} 27' 28''$ og lig $\div \varepsilon \cdot g\alpha$ for $\theta = \theta_m$, idet $\varepsilon < 1$; venstre Side bliver derimod respective lig $\div \varepsilon_1 \cdot g\alpha$ og $\div \infty$, idet $\varepsilon_1 > 0$, og deraf fremgaaer, at Vandspeilet heller ikke i dette Tilfælde har noget Inflexionspunkt. Det bemærkes fremdeles, at T er negativ i Nærheden af Fyldningsgraden θ_m , og deraf vil det være indlysende, dels at Fyldningsgraden θ_m svarer til Ledningens Indløb, dels at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er positiv, og følgelig Vandspeilet convex imod Ledningens Bund. Vandspeilets Krumningsradius er bestandig negativ, voxende fra $\gamma = -\delta \cdot g\alpha \cdot \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$ til $\gamma = -\infty$, naar Fyldningsgraden aftager fra θ_m til θ_p .

Fig. 18.

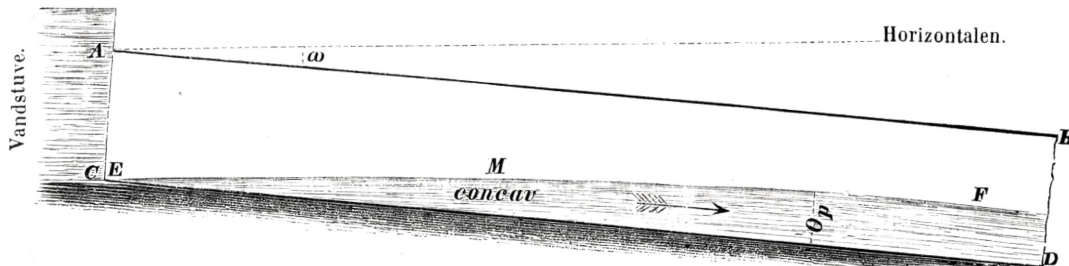


I Henhold til det Udviklede er det klart, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen II. A. b, kan fremstilles ved Linien EMF paa ovenstaaende Fig. 18, idet $ABCD$ betegner den givne Ledning.

Antage vi endelig, at Betingelsen II. A. c er opfyldt ved den givne Ledning, [saa er Vandspeilet i Stigning i Ledningen fra $\theta = 0$ til $\theta = \theta_p$, og ψ altsaa aftagende fra ∞ til ψ_p . Fra $\theta = 0$ til $\theta = \theta_p$ aftager $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ positivt fra $g\alpha$ til Nul, hvorimod høire Side af Betingelsesligningen (36) er positivt voxende fra $g\alpha$ til $\varepsilon \cdot g\alpha$, idet $\varepsilon < 1,38$, og deraf see vi, at Vandspeilet ikke har noget Inflexionspunkt. Af (32) følger dernæst, at T er negativ for Fyldningsgrader, der ligge ganske nær ved θ_p , og deraf fremgaaer altsaa, at

$\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ, og at Vandspeilet er concavt mod Ledningens Bund i hele dets Udstrækning. Med Hensyn til Vandspeilets Krumningsradius bemærkes endelig, at γ er positiv, at den er uendelig stor baade for $\theta = 0$ og for $\theta = \theta_p$, men derimod er endelig mellem begge disse Grændser, og det vil saaledes være klart, at Vandspeilsformen, svarende til Betingelsen II. A. c, kan fremstilles ved Linien EMF paa efterstaaende Fig. 19, idet $ABCD$ betegner den givne Ledning.

Fig. 19.



Med Hensyn til de Forhold ved Ledningen, hvorunder disse 3 Vandspeilsformer, Fig. 17, 18 og 19, danne sig, da er det aabenbart, at Formen Fig. 19 fremstaaer, naar Vandet strømmer ind i Ledningen igjennem en Stigbordsaabning med en Hastighed, der er større end den, som svarer til Parallelstrømmen for samme Vandføring. Fremdeles, at den fuldstændige Form Fig. 18 er den naturlige Form af Vandspeilet, naar Vandet indstrømmer fra et Indløbsbassin, hvori det ikke har nogen Begyndeshastighed, og Ledningen har frit Afløb, samt endelig, at Vandet, naar det er opstemmet i Ledningen til en saadan Høide, at sidstnævnte Form ikke kan danne sig, vil stille sig under Formen Fig. 17, naar Vandføringen er den samme som under Formen Fig. 18 ved frit Afløb.

Efter saaledes at have fremstillet de tre mulige Vandspeilsformer, som kunne fremtræde under Betingelsen II. A., ville vi nu søge at bestemme de Vandspeilsformer, der svare til Betingelsen:

$$\text{II. B. . . . } \varphi_p > \psi_p > \psi_m \text{ og } \theta_p > 270^\circ.$$

Af denne Betingelse i Forbindelse med Formlen (31) fremgaaer let, at naar $\psi_m > \psi_{\bar{\omega}}$, saa er

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} & \text{ negativ fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_{\bar{\omega}}, \\ & \text{— positiv - } \psi = \psi_{\bar{\omega}} - \psi = \psi_m, \\ & \text{— negativ - } \psi = \psi_m - \psi = \psi_p, \text{ og endelig} \\ & \text{— positiv - } \psi = \psi_p - \psi = \infty, \end{aligned}$$

hvorimod naar $\psi_{\bar{\omega}} > \psi_m$, saa er:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} & \text{ negativ fra } \psi = 0 \text{ til } \psi = \psi_m, \\ - & \text{ positiv - } \psi = \psi_m - \psi = \psi_{\bar{\omega}}, \\ - & \text{ negativ - } \psi = \psi_{\bar{\omega}} - \psi = \psi_p, \text{ og endelig} \\ - & \text{ positiv - } \psi = \psi_p - \psi = \infty. \end{aligned}$$

Den foreliggende Classe II. B. deler sig altsaa naturlig i følgende 2 Classer af Tilfælde:

- II. B. a., hvori $\varphi_p > \psi_p > \psi_m > \psi_{\bar{\omega}}$, idet $\theta_p > 270^\circ$.
 II. B. b., hvori $\varphi_p > \psi_p > \psi_{\bar{\omega}} > \psi_m$, idet $\theta_p > 270^\circ$.

Betragte vi den første af disse, saa vil det blive indlysende, at det vil være naturligt at skjæle imellem følgende Tilfælde, som kunne forekomme:

$$\left. \begin{aligned} \text{II. B. a. } \alpha. & \dots 0 < \psi < \psi_{\bar{\omega}}, \text{ naar } 360^\circ > \theta > \theta_{\bar{\omega}}, \\ \text{II. B. a. } \beta. & \dots \psi_{\bar{\omega}} < \psi < \psi_m, - \theta_{\bar{\omega}} > \theta > \theta_m, \\ \text{II. B. a. } \gamma. & \dots \psi_m < \psi < \psi_p, - \theta_m > \theta > \theta_p, \\ \text{II. B. a. } \delta. & \dots \psi_p < \psi < \infty, - \theta_p > \theta > 0^\circ \end{aligned} \right\}$$

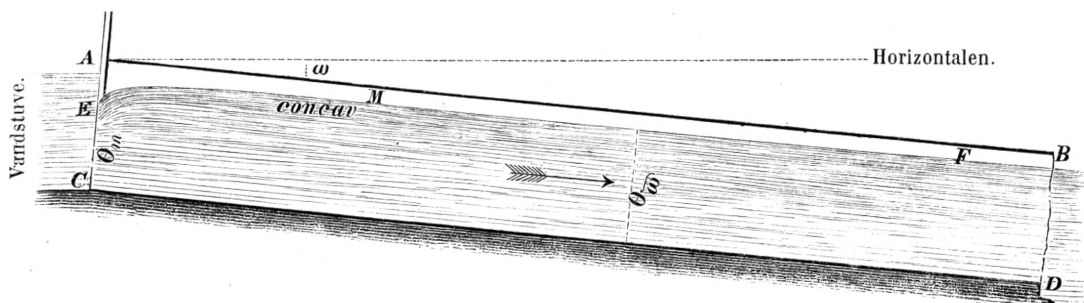
Naar vi da efterhaanden betragte disse Tilfælde, saa viser det sig let, at Betingelsen II. B. a. $\alpha.$ falder sammen med den tidligere Betingelse I. B. a., at Betingelsen II. B. a. $\gamma.$ falder sammen med Betingelsen II. A. b., samt at Betingelsen II. B. a. $\delta.$ falder sammen med Betingelsen II. A. c., og heraf følger altsaa, at Vandspeilsformerne, som svare til Betingelserne II. B. a. $\alpha.$, II. B. a. $\gamma.$ og II. B. a. $\delta.$, respective ere identiske med de Former, som ere fremstillede ved Figurerne 15, 18 og 19. Hvad dernæst Betingelsen II. B. a. $\beta.$ angaaer, saa bemærkes, at da $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv, saa er Vandspeilet i Stigning i

Ledningen fra $\theta = \theta_m$ til $\theta = \theta_{\bar{\omega}}$, altsaa ψ aftagende fra ψ_m til $\psi_{\bar{\omega}}$, hvorhos $\frac{dU}{d\lambda}$ er samtidigt aftagende fra ∞ til Nul. Fremdeles bemærke vi, at da $\theta_{\bar{\omega}} > 311^\circ 27' 28''$, saa er den høire Side af Formlen (36) kun positiv i Intervallet θ_m til $311^\circ 27' 28''$, naar $\theta_m < 311^\circ 27' 28''$, og altsaa kun da kan der blive Spørgsmaal om Tilstedeværelsen af et Inflexionspunkt i den søgte Vandspeilsform; men heller ikke i dette Tilfælde kan et saadant Punkt forekomme; thi medens venstre Side af Betingelsesligningen aftager fra $+\infty$ til $\varepsilon.g\alpha$, naar θ voxer fra θ_m til $311^\circ 27' 28''$, saa aftager høire Side fra $\varepsilon_1.g\alpha$ til Nul, idet ε er en positiv Størrelse og $\varepsilon_1 < 1,02$, hvoraf fremgaaer, at begge Sider af Ligningerne bestandigt ere ulige store, og at den søgte Vandspeilsform følgelig ikke har noget Inflexionspunkt.

Formlen (32) viser dernæst, at T er negativ i Nærheden af Fyldningsgraden θ_m , hvorefter følger, at $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ, saa at Vandspeilet heelt og holdent er concav imod Ledningens Bund. Med Hensyn paa Vandspeilets Krumningsradius bemærkes, at denne bestandig er positivt voxende fra $\gamma = \delta \cdot g \alpha \cdot \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$ til ∞ , naar θ voxer fra θ_m til $\theta_{\bar{\omega}}$.

Af det saaledes Udviklede er det indlysende, at den søgte Vandspeilsform kan fremstilles ved Linien EMF i efterstaaende Fig. 20, idet $ABCD$ betegner den givne Ledning, og det er tilmed klart, at denne Form danner sig, naar en Opstemning ved Udløbet forhindrer Formen, Fig. 18, fra at fremtræde.

Fig. 20.



Naar vi nu derefter gaae over til Bestemmelsen af de Vandspeilsformer, som svare til Betingelsen

$$\text{II. B. b. } \varphi_p > \psi_p > \psi_{\bar{\omega}} > \psi_m,$$

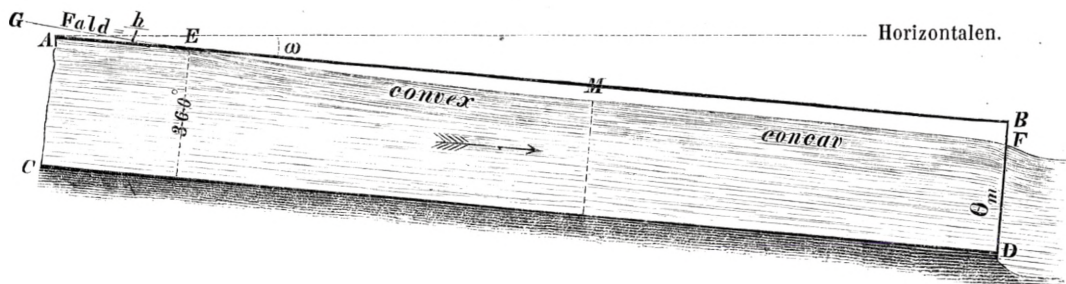
saa maa vi atter skjelne mellem følgende Tilfælde:

$$\left. \begin{array}{l} \text{II. B. b. } \alpha. \dots 0 < \psi < \psi_m, \text{ hvori } 360^\circ > \theta > \theta_m \\ \text{II. B. b. } \beta. \dots \psi_m < \psi < \psi_{\bar{\omega}}, \quad - \quad \theta_m > \theta > \theta_{\bar{\omega}}, \\ \text{II. B. b. } \gamma. \dots \psi_{\bar{\omega}} < \psi < \psi_p, \quad - \quad \theta_{\bar{\omega}} > \theta > \theta_p \text{ og} \\ \text{II. B. b. } \delta. \dots \psi_p < \psi < \infty, \quad - \quad \theta_p > \theta > 0^\circ. \end{array} \right\}$$

Antage vi, at den første af disse Betingelser, nemlig II. B. b. $\alpha. \dots 0 < \psi < \psi_m$ er tilfredsstillet, saa er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ negativ, og altsaa Vandspeilet i Sænkning fra $\theta = 360^\circ$ til $\theta = \theta_m$. ψ er følgelig voxende fra Nul til ψ_m , og $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ negativt voxende fra $\div g \alpha \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$ til $\div \infty$. Fra $\theta = 360^\circ$ til $\theta = \theta_m$ bemærke vi endvidere, at den høire

Side af Ligningen (36) er negativt aftagende fra $\div g\alpha$ til $-\varepsilon.g\alpha$, idet ε er en positiv ægte Brøk, og da $\frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$ er en positiv ægte Brøk, saa er det klart, at der gives et Punkt af Vandspeilet, for hvilket Betingelsesligningen (36) er tilfredsstillet, og som følgelig er et Inflexionspunkt. Fremdeles er det indlysende af Formlen (32), at T er positiv i Nærheden af θ_m , hvoraf deels følger, at Fyldningsgraden θ_m svarer til Ledningens Udløb, deels at $\left(\frac{d^2 U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ i Nærheden af θ_m . Vandspeilet er altsaa concavt imod Ledningens Bund fra Udløbet til Inflexionspunktet, og convext imod Bunden fra dette Punkt til $\theta = 360^\circ$. Angaaende Krumningsradius bemærkes, at γ er negativ fra $\theta = 360^\circ$ indtil Inflexionspunktet, voxende fra Nul til $-\infty$, hvorimod den er positivt aftagende, fra Inflexionspunktet til $\theta = \theta_m$, fra $+\infty$ til $\delta.g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - \varphi_m}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$.

Fig. 21.



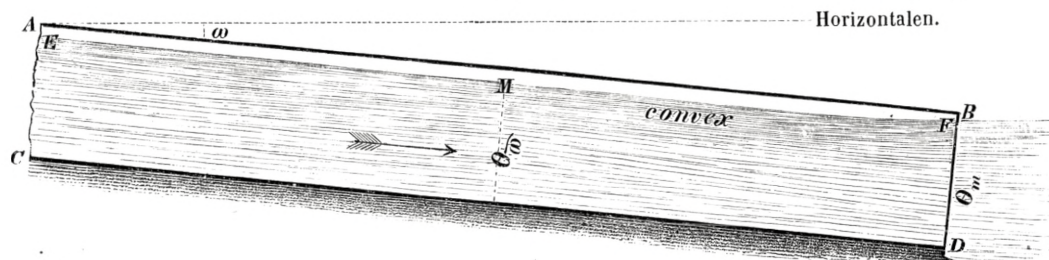
I Overeensstemmelse med det saaledes Udviklede er det klart, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen II. B. b. α . kan fremstilles ved Linien EMF i ovenstaaende Fig. 21, hvor M betegner Inflexionspunktet af Vandspeilet, og $ABCD$ fremstiller den givne Ledning. Jeg skal herved fremdeles bemærke, at, da vi have seet, at i det Punkt E , hvor Vandspeilsformen Fig. 21 begynder med en Fyldningsgrad $\theta = 360^\circ$, er $\frac{dU}{d\lambda} = -g\alpha \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$, saa kan Vandspeilets absolute Fald i dette Punkt, ifølge Formlen (110), fremstilles ved Formlen (109), og deraf fremgaaer, at Tangenten GE til Vandspeilet i bemeldte Punkt E fremstiller Vandreisningen i hele den ovenfor liggende Deel af Ledningen.

Antage vi derefter, at Ledningen tilfredsstiller Betingelsen

$$\text{II. B. b. } \beta. \dots \psi_m < \psi < \psi_\omega,$$

saa see vi først, at $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er positiv, hvoraf følger, at Vandspeilet er stigende fra $\theta = \theta_{\omega}$ til $\theta = \theta_m$, at ψ er aftagende fra ψ_{ω} til ψ_m og $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er voxende fra Nul til $+\infty$. Af Tabel 6 følger dernæst, at høire Side af Ligningen (36) er negativ fra $\theta = \theta_{\omega}$ til $\theta = \theta_p$, og da $\frac{dU}{d\lambda}$ er positiv i hele Intervallet, saa har den søgte Vandspeilsform altsaa intet Inflexionspunkt. Men i Nærheden af θ_m er det indlysende ifølge (32), at T er positiv, og deraf følger dels, at θ_m svarer til Udløbet af Ledningen, dels at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er positiv, og at Vandspeilet altsaa er convex imod Ledningens Bund. Krumningsradius til Vandspeilet finde vi at være negativ, aftagende fra $\div \infty$ til $\div \delta \cdot g \alpha \cdot \frac{\varphi_p - \varphi_m}{\left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$, og Vandspeilsformen kan følgelig fremstilles ved Linien EMF paa efterstaaende Fig. 22, idet $ABCD$ betegner den givne Ledning.

Fig. 22.



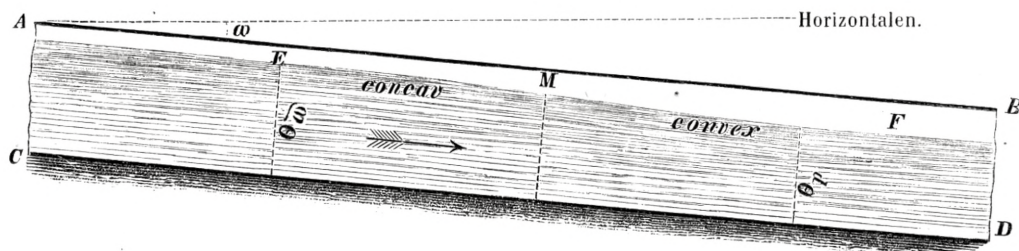
Tænke vi os derefter, at Betingelsen

$$\text{II. B. b. } \gamma \dots \psi_{\omega} < \psi < \psi_p$$

er tilfredsstillet, saa er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ negativ, og Vandspeilet altsaa i Sænkning fra $\theta = \theta_{\omega}$ til $\theta = \theta_p$, og ψ voxende fra ψ_{ω} til ψ_p . Fremdeles er $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ Nul for $\theta = \theta_{\omega}$, og derfra negativt voxende, men senere atter aftagende til Nul, naar θ aftager til θ_p , og det er let at see, at $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ virkelig har et Maximumpunkt mellem θ_{ω} og θ_p , eller med andre Ord, at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er Nul for en mellemliggende Værdi af θ ; Betingelsen herfor er nemlig den, at

Ligningen (36) skal være tilfredsstillet, og at Vandspeilet følgelig skal have et Inflexionspunkt for en saadan Fyldningsgrad. Nu er venstre Side af (36) bestandig negativ, hvorimod høire Side kun er negativ fra $\theta = 311^\circ 27' 28''$ til $\theta = \theta_{\bar{\omega}}$, og deraf følger, at Inflexionspunktet maa søges i dette Interval. For dernæst at afgjøre, om et saadant Punkt findes i det søgte Vandspeil, bemærke vi, at naar θ aftager fra $\theta_{\bar{\omega}}$ til $311^\circ 27' 28''$, saa voxer $\frac{dU}{d\lambda}$ fra Nul til $\div g\alpha \cdot \frac{\varphi_p - 0,1837}{0,0276 - \psi_m}$, hvorimod høire Side af (36) aftager fra $\div \varepsilon \cdot g\alpha$ til Nul, idet ε er en positiv ægte Brøk, og deraf fremgaaer altsaa klart, at der virkelig findes et Inflexionspunkt i det søgte Vandspeil mellem $\theta_{\bar{\omega}}$ og $311^\circ 27' 28''$. Naar vi nu tillige lægge Mærke til, at ifølge (32) er T positiv for Fyldningsgrader, der ligge ganske nær ved $\theta_{\bar{\omega}}$, samt at T er negativ i Nærheden af θ_p , saa bliver det indlysende, at $\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ fra $\theta_{\bar{\omega}}$ til Inflexionspunktet, og positiv fra dette til $\theta = \theta_p$. Hvad Krumningsradius angaaer, da bemærke vi, at γ er positiv i førstnævnte og negativ i sidstnævnte Interval, uendelig stor saavel i Inflexionspunktet som for $\theta = \theta_{\bar{\omega}}$ og for $\theta = \theta_p$, men endelig mellem disse Punkter, og det vil saaledes være klart, at den søgte Vandspeilsform, svarende til Betingelsen II. B. b. γ ., kan fremstilles ved Linien EMF' paa efterstaaende Fig. 23, idet $ABCD$ betegner Ledningen.

Fig. 23.



Betragte vi endelig den Vandspeilsform, som svarer til Betingelsen II. B. b. δ ., saa viser det sig strax, at denne Form er identisk med den, som er fremstillet i Figur 19.

Ville vi nu undersøge de Forhold, hvorunder disse forskjellige Vandspeilsformer danne sig, saa viser det sig let, at Formen Fig. 23 i Reglen vil være en Continuation af Formen Fig. 15, naar Strømmen har frit Afløb. Flyder derimod en Parallelstrøm under den største Fyldningsgrad $\theta_{\bar{\omega}}$, og opstemmes Vandet yderligere bag Udløbet, saa vil Vandspeilsformen Fig. 22 danne sig. Naar den givne Vandledning er overfyldt i den øvre Deel,

og Vandet i Afløbsbassinet er opstemmet over den Fyldningsgrad θ_{ω} , som svarer til den dybeste Parallelstrøm, saa vil Vandspeilsformen Fig. 21 danne sig.

Sammenfatte vi det her Udviklede, saa viser det sig, at der under Betingelsen II. B. i det Hele kun kan danne sig de i det Foregaaende ved Figurerne 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22 og 23 angivne 8 forskellige Vandspeilsformer, og det viser sig navnlig:

1. at Vandspeilsformen Fig. 15 danner sig, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p > 270^\circ$, og Ledningens Fald, bestemt ved Formlen (107), er større end $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, saafremt Ledningen deelviis er overfyldt fra Indløbet ned imod Udløbet;
2. at herfra dog maa undtages det Tilfælde, hvor $\text{tg } \omega > g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, og hvori Vandet i Afløbsbassinet er opstemmet til en større Høide end den, som svarer til Parallelstrømmen θ_{ω} ; thi i dette Tilfælde vil Vandspeilsformen Fig. 21 danne sig ved Udløbet, hvis Ledningen har en passende Længde;
3. at, naar Ledningen i det nys omtalte Tilfælde har en større Længde end den, hvorved Formen Fig. 21 kan danne sig, saa vil Formen Fig. 15, efterfulgt af Formen Fig. 22, fremtræde som en continueerlig Vandspeilsform;
4. at, naar Vandet ikke er opstemmet bag ved Ledningen, saaledes som nys omtalt, men dette har frit Afløb igjennem Ledningen, hvis Fald $= \text{tg } \omega > g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, saa vil Strømmen fra den overfyldte øverste Deel af Ledningen antage Formen Fig. 15, og derfra igjennem Vandspeilsformen Fig. 23 gaae over til en Parallelstrøm med Fyldningsgraden $\theta_p > 270^\circ$;
5. at, naar Vandet indstrømmer fra et Indløbsbassin, hvori det er i Hvile, og Ledningen ikke er overfyldt i Indløbet, saa danner Vandspeilsformen Fig. 18 sig, naar Ledningens Fald, bestemt ved Formlen (107), er større end $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$ og Ledningen har frit Afløb;
6. at, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p < 270^\circ$, og Vandet er saaledes opstemmet i Ledningen, at Formen Fig. 18 ikke kan danne sig, saa vil Vandspeilsformen Fig. 17 danne sig ved samme Fald og Vandføring;
7. at, naar Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p > 270^\circ$, saa vil en Opstemning, der forhindrer Formen Fig. 18 fra at fremtræde, bevirke, at Vandspeilsformen Fig. 20 danner sig;

8. at, naar Ledningens Fald, bestemt ved Formlen (107), er større end $g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p}$, og Vandet strømmer ind i Ledningen igjennem en Stigbordsaabning med en større Hastighed end den, som svarer til Parallelstrømmens Fyldningsgrad θ_p , saa danner Vandspeilsformen Fig. 19 sig.

Men den hele saaledes fuldførte Undersøgelse over de frie Vandspeilsformer i cylindriske Ledninger med et cirkelformet Tværsnit forudsætter, at der overhovedet gives en Parallelstrøm med Fyldningsgraden θ_p , for hvilken $\varphi = \varphi_p$, eller med andre Ord, i Henhold til Tabel 6, at $\varphi_p \geq 0,1837$. Som Indledning til hvad jeg i det Følgende har at anføre, skal jeg bemærke, at i det specielle Tilfælde, hvor $\varphi_p = 0,1837$, hvilket Tilfælde danner den yderste Grændse for de nys undersøgte Vandspeilsformer, viser det sig let, at der i det Hele kun er 6 Vandspeilsformer mulige, og det saaledes, at, naar $\text{tg } \omega < \left(g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p} = 6,67 \cdot g\alpha \right)$, ere kun de tre Former, som ere fremstillede ved Figurerne 13, 14 og 15, mulige, hvorimod, naar $\text{tg } \omega > \left(g\alpha \cdot \frac{\varphi_p}{\psi_p} = 6,67 \cdot g\alpha \right)$, kun de tre Former, som ere fremstillede ved Figurerne 19, 21 og 22, kunne fremstaae. I det første af disse to Tilfælde vil man derhos finde, at, da Parallelstrømmens Fyldningsgrad $\theta_p = 311^\circ 27' 28''$, saa vil Vandspeilsformen Fig 13 følge efter Formen Fig. 15, og danne ligesom een continueerlig Form.

Men tænke vi os derefter, at Ledningens Vandføring er saa stor, at der under det givne Fald af Ledningen ikke eksisterer nogen Fyldningsgrad, hvorved Strømmens Vandspeil kan flyde parallelt med Ledningens Bund, saa er det klart, ifølge Formlen (26), at $\varphi < 0,1837$, og vi ville derfor søge at bestemme de forskjellige Vandspeilsformer, som kunne fremtræde, naar

$$\text{III. } \varphi_p < 0,1837.$$

Naar denne Betingelse er opfyldt, er det aabenbart, at $(\varphi_p - \varphi)$ stedse er negativ, og som en Følge deraf finde vi let, naar vi betragte Formlen (31),

at $\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)$ er negativ for alle Fyldningsgrader, der ligge mellem 360° og θ_m , og

at $\left(\frac{dU}{d\lambda} \right)$ er positiv for alle Værdier af θ , der ligge mellem 0° og θ_m .

Antage vi først, at Ledningen tilfredsstiller Betingelsen

$$\text{III. A. } \varphi_p < 0,1837, 360^\circ > \theta > \theta_m,$$

saa er det klart, at Vandspeilet sænker sig fra 360° Fyldning til θ_m , medens ψ voxer fra Nul til ψ_m og at $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ voxer fra $\div g\alpha \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$ til $\div \infty$. Vi bemærke dernæst, at, skal Vandspeilet have noget Inflexionspunkt, saa maa dette ligge mellem $311^\circ 27' 28''$ og 360° , eftersom høire Side af Formlen (36) skal være negativ. Men ifølge Tabel 6 see vi, at høire Side af (36) aftager fra $\div g\alpha$ imod Nul, naar θ aftager fra 360° imod $311^\circ 27' 28''$, imedens venstre Side af Ligningen voxer fra $-g\alpha \frac{0,2026 - \varphi_p}{\psi_m}$ imod $\div \infty$.

Herved ledes vi altsaa til at skjelne imellem følgende to Tilfælde:

III. A. a, . . . hvori $\psi_m > 0,2026 - \varphi_p = 0,0189$ à $0,2026$,
og hvori følgelig $\theta_m < 327^\circ$,

i hvilket Tilfælde Vandspeilet har et Inflexionspunkt, og

III. A. b., . . . hvori $\psi_m < 0,2026 - \varphi_p = 0,0189$ à $0,2026$,
og hvori følgelig $\theta_m > 212^\circ$,

i hvilket Tilfælde Vandspeilet ikke har noget Inflexionspunkt. Det bemærkes herved fremdeles, at T er positiv i begge disse Tilfælde for Fyldningsgrader, der ligge ganske nær ved θ_m , og deraf fremgaaer, deels at θ_m er Ledningens Fyldningsgrad i Udløbet, deels at

$\left(\frac{d^2U}{d\lambda^2}\right)$ er negativ i Nærheden af Udløbet. Vandspeilet er altsaa concavt imod Ledningens

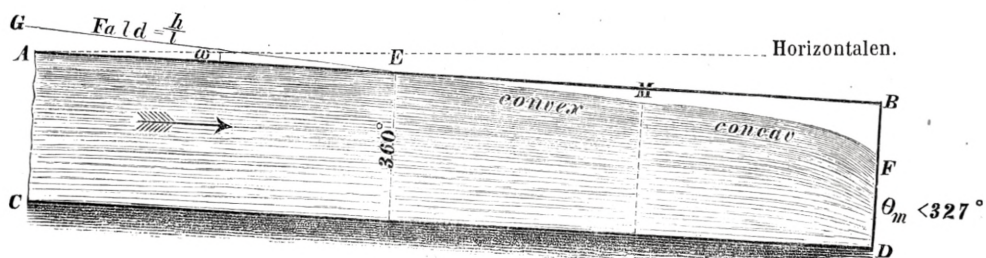
Bund fra Udløbet indtil Inflexionspunktet, naar et saadant findes, og convext imod Bunden fra Inflexionspunktet til 360° Fyldning. Har Vandspeilet derimod intet Inflexionspunkt, saa er Vandspeilet heelt igjennem concavt imod Ledningens Bund. Med Hensyn paa Vandspeilets Krumningsradius bemærkes, at, naar dette har et Inflexionspunkt, saa er γ negativ fra 360° Fyldning indtil Inflexionspunktet, voxende fra $\gamma = 0$ til $\gamma = -\infty$; men paa den anden Side er γ positiv fra Inflexionspunktet indtil $\theta = \theta_m$, aftagende fra $\gamma = \infty$

til $\gamma = \delta \cdot g\alpha \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\div \left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$. Har Vandspeilet derimod intet Inflexionspunkt, saa er γ bestandig

positiv, voxende fra $\gamma = 0$ til en vis Grændse, og derpaa aftagende indtil $\gamma = \delta \cdot g\alpha \frac{\varphi_m - \varphi_p}{\div \left[\frac{d\psi}{du}\right]_m}$,

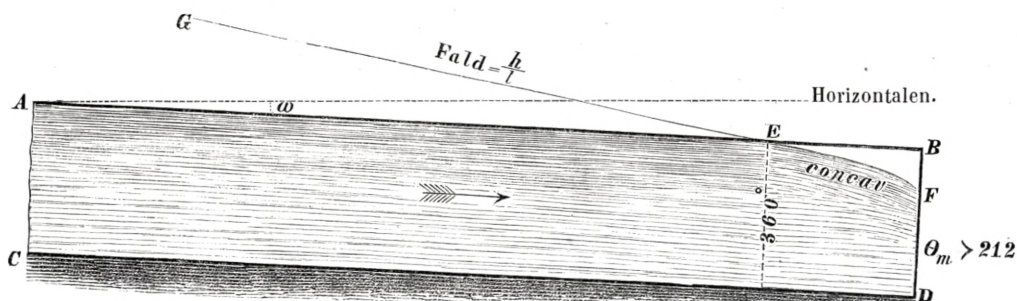
idet θ aftager fra 360° indtil θ_m .

Fig. 24.



Den første af disse Vandspeilsformer, svarende til Betingelsen III. A. a., har jeg fremstillet ved EMF i ovenstaaende Fig. 24, og denne Form vil findes i det Væsentlige at være overensstemmende med Vandspeilsformen Fig. 21, saavel som med den forenede Form af Figurerne 15 og 13, som fremtræder naar $\varphi_p = 0,1837$. Betingelsen for, at Vandspeilsformen Fig. 24 skal fremtræde, er, ligesom i de nys omtalte Tilfælde, at den rette Linie, som fremstiller Vandreisningen i den overfyldte Deel af Ledningen, ikke maa danne nogen større Vinkel med Ledningens Retning end den, som er bestemt ved $\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha$. Har Vandreisningen for den overfyldte Deel af Ledningen et større Fald imod Ledningens Retning end det, som er bestemt ved $\frac{dU}{d\lambda} = g\alpha$, saa er Betingelsen III. A. b. tilfredsstillet, og i dette Tilfælde vil altsaa Vandspeilsformen EMF , der er angivet i efterfølgende Fig. 25, fremtræde, idet $ABCD$ fremstiller Ledningen.

Fig. 25.



Betragte vi dernæst Tilfældet III. B. . . . $\varphi_p < 0,1837$, $\theta < \theta_m$, som tilfredsstillet,

saa vil det blive klart, at Vandspeilet er i Stigning fra $\theta = 0$ til $\theta = \theta_m$, at $\frac{dU}{d\lambda}$ er positivt voxende fra $g\alpha$ til $+\infty$, og at ψ er aftagende fra ∞ til ψ_m . Men sammenholde vi da dette Tilfælde med det tidligere under I. A. c. behandlede Tilfælde, saa vil det sees, at den heromhandlede Vandspeilsform er identisk med Vandspeilsformen Fig. 14.

Det viser sig altsaa, at naar $\varphi_p < 0,1837$, saa vil der i det Hele være 3 Vandspeilsformer mulige, og af disse 3 Former er den ene ganske overensstemmende med den tidligere ved Fig. 14 angivne Form, den anden, Fig. 24, en videre Udvikling af Formen 21 igjennem de to Vandspeilsformer Fig. 15 og 13, og den 3die, Fig. 25, en ny Form.

Sammenfatte vi nu paa een Gang Resultatet af hele denne Undersøgelse over de frie Vandspeilsformer i cylindriske Ledninger med cirkelformigt Tværsnit, saa viser det sig, at, naar Ledningen har Fald i Strømmens Retning, gives der ialt 13, eller, hvis man betragter Formen Fig. 24 som ny, da 14 forskellige Vandspeilsformer, hvorunder Strømmen kan bevæge sig, og dele vi de mulige Tilfælde i Grupper efter de Forhold, hvorunder de fremtræde, saa komme vi endvidere til følgende Resultat:

1. at, naar Ledningens Fald i Forhold til Vandføringen er saa lille, at Størrelsen φ_p , Formel (26), er mindre end 0,1837, kan kun een af de tre Former, som ere angivne ved Fig. 14, 24 og 25, fremtræde;
2. at, naar Ledningens Fald er et saadant, at en Parallelstrøm kan finde Sted i Ledningen, men paa den anden Side dog ikke er større end at $\text{tg } \omega < g\alpha \left(\frac{\varphi_p}{\psi_p} \right)$, ville Vandspeilsformerne Fig. 12, 13, 14, 15 og 16 kunne fremtræde, naar Vandføringen ikke overskrider Grændsen for en Parallelstrøm i Ledningen;
3. at, naar Ledningens Fald, bestemt ved $\text{tg } \omega$, er større end $g\alpha \left(\frac{\varphi_p}{\psi_p} \right)$ og Vandføringen ikke overskrider Grændsen for Ledningens Vandføring under en Parallelstrøm, vil det frie Vandspeil antage en af Formerne, som ere angivne ved Figurene 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22 og 23;
4. at, naar Ledningens Vandføring i noget Tilfælde overskrider Muligheden af en Parallelstrøm, vil Vandspeilet antage en af de tre Former Fig. 14, 24 og 25.

Ved den hele foregaaende Undersøgelse have vi forudsat, at Ledningen har Fald i den Retning, hvori Vandstrømmen bevæger sig, Faldet være forøvrigt saa, lille som man vil; men det er indlysende, at, ligesom ved de rektangulære Ledninger, saaledes kan ogsaa her det Tilfælde forekomme, at Ledningen har Fald i modsat Retning af Strømmens

Bevægelse, eller med andre Ord, Ledningen kan være i Stigning i den Retning, vi betragte som positiv. Men tænke vi os, at Ledningen er i Stigning i den Retning, hvori Strømmen bevæger sig, saa er dens Heldningsvinkel ω negativ, hvorfor det vil være beqvemt at betegne den ved $(-\omega)$, idet ω da, som hidtil, betegner en Vinkel i første Kvadrant. Indsætte vi $(-\omega)$ istedetfor ω i Formlerne (26) og (27), saa see vi let, at φ_p forandres til $-\varphi_p$, hvorimod ψ_m bliver uforandret.

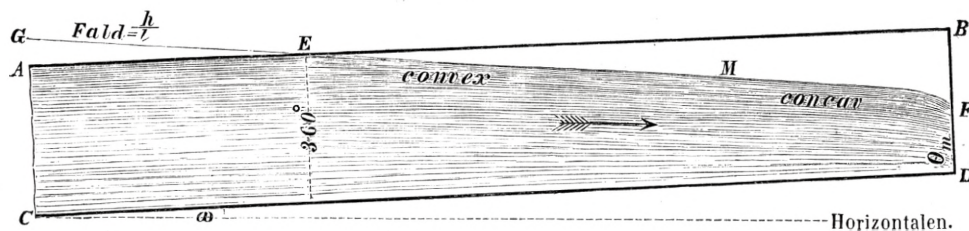
Men naar vi nu i Henhold hertil betragte Størrelsen φ_p , som indgaaer i Formlerne (31) og (36), som negativ, altsaa $(-\varphi_p)$ som positiv, saa viser det sig let, ganske i Overensstemmelse med hvad vi under Betingelserne III. A. og III. B. have fundet,

1) at $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er negativ for alle Fyldningsgrader fra $\theta = 360^\circ$ til $\theta = \theta_m$,

og 2) at $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ er positiv for alle Fyldningsgrader fra $\theta = \theta_m$ til $\theta = 0$,

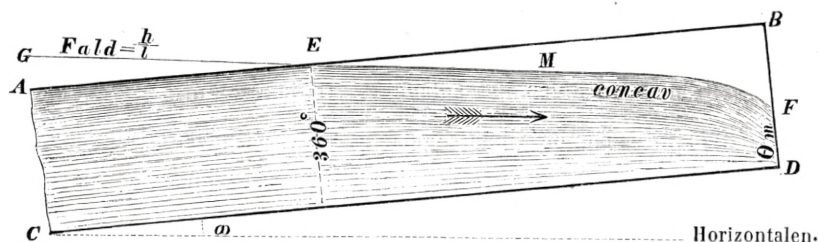
og deraf følger ligefrem, at der i en stigende Ledning kan fremtræde trede Vandspeilsformer, der ere overensstemmende med de Former, som ere fremstillede ved Figureerne 24, 25 og 14.

Fig. 26.



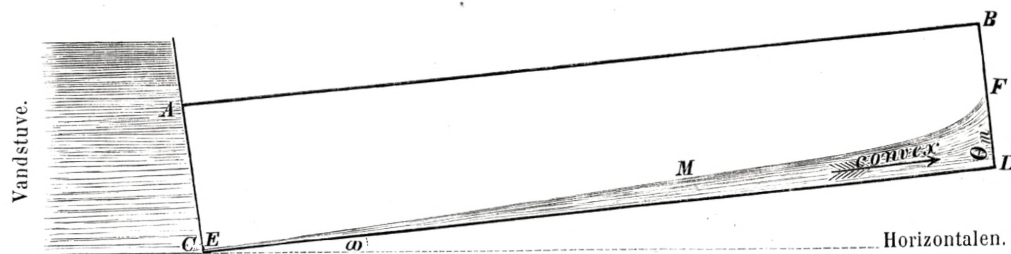
Den første af disse Former, som jeg har fremstillet ved Linien EMF i ovenstaaende Fig. 26, danner sig, naar Vandreisningen GE i den overfyldte Deel af Ledningen ovenfor Punktet E danner en Vinkel med Ledningens Retning EA , hvis Tangens er mindre end $g\alpha$.

Fig. 27.



Den anden Vandspeilsform, som jeg har fremstillet ved Linien EMF i ovenstaaende Fig. 27, danner sig derimod, naar Tangens af Vinklen GEA er større end $g\alpha$.

Fig. 28.



Den tredje af disse Vandspeilsformer, som jeg har fremstillet ved Linien EMF i ovenstaaende Fig 28, danner sig endelig, naar Vandet strømmer ind i Ledningen under et Stigbord med stor Hastighed; men denne Form vil, ligesom Vandspeilsformen Fig. 14, kun være bestandig, naar Ledningens Længde ikke overskrider en vis Grændse.

Med Hensyn til disse forskjellige Vandspeils virkelige Fald eller Stigning imod Horizontalplanet, da viser det sig let, naar vi indsætte Værdierne for $\text{tg } \omega$ og $\frac{dU}{d\lambda}$ ifølge Formlerne (107) og (31) i Formlen (110), at Vandspeilsformerne Fig. 26 og 27 have et virkeligt Fald, hvorimod Vandspeilsformen Figur 28 er bestandigt stigende. Men heraf følger let, naar vi betragte Figurerne, at baade Vandspeilsformen Fig. 26 og Formen 27 forudsætte, at Vinklen $GEA > \omega$. Den første af disse Former danner sig altsaa kun, naar Ledningen har et ganske lille Fald, hvorimod den sidste Form danner sig ved alle større Fald.

Af den saaledes fuldførte Undersøgelse over de frie Vandspeilsformer i cylindriske Ledninger med et cirkelformigt Tværsnit fremgaaer, at det hele Antal af forskjellige Former, som kunne fremtræde i disse Ledninger, er 14.

